

Anizotropik Ortamda Işığın Davranışı: Stokes- Mueller Matris Hesaplaması

Haluk ŞAFAK¹, Sebahaddin ALPTEKİN, Atilla GÜLEÇ

Selçuk Üniv., Fen Edeb. Fak., Fizik Bölümü, Kampus KONYA

Özet: Anizotropik bir ortamın çift kırıcılık ve çift renklilik özellikleri Mueller matris formalizmi çerçevesinde analitik olarak incelenmiş ve farklı olası durumlar için lineer ve dairesel kutuplanma derecelerinin ışığın ortam içerisinde aldığı yol ile değişimi araştırılmıştır. Bu değişimlerin incelenmesi sonucu, çift kırıcılık özelliğinin çift renklilikten daha baskın olduğu durumlarda, anizotropik bir ortamda ilerleyen ışığın kutuplanma derecesinin bir salınım davranışı gösterdiği, diğer taraftan çift renklilik özelliğinin çift kırıcılıktan daha büyük olduğu durumlarda ise kutuplanma derecesinin hiperbolik bir değişim gösterdiği sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Mueller ve Jones matrisleri, Kutuplanma, Stokes vektörleri, Çift kırıcılık, İki renklilik.

The Behavior of Light in an Anisotropic Medium: Stokes- Mueller Matrix Calculation

Abstract: The birefringence and dichroism aspects of any anisotropic media are analyzed analytically in frame of the Mueller matrix formalism and for different possible cases, the variations of linear and circular polarization degrees with the way taken by the light are investigated. By inspection of these variations, it has been concluded that, in the cases in which the birefringence character are dominated over dichroism, the polarization degree of light traveling through an anisotropical medium shows on oscillatory behavior, while, in the cases which has a dichroic character larger than birefringence, the polarization degree shows a hyperbolic behavior.

Key Words: Mueller and Jones matrixes, Polarization, Stokes vectors, Birefringence, Dichroism.

Giriş

Işığın kutuplanmasının temsilini sağlayan yöntemlerin birçoğu 19. yüzyılda ortaya çıkmıştır. Ancak polarimetrik optiğin gelişimi, lazer ve fiber optik gibi sofistike teknolojik sistemlerin gelişiminden itibaren başlamaktadır. Benzer şekilde, elektromagnetizmadaki polarimetrik bilgi; radar taraması, telekomünikasyon sistemleri (fiber optik) [1], astronomi, tıp

¹ E-mail: hsafak@selcuk.edu.tr

[2], biyoloji, biyokimya, ve sualtı araştırması [12] gibi değişik araştırma alanlarında geniş olarak kullanılmıştır.

Bir elektromagnetik dalga ve homojen ortam arasındaki etkileşme Jones formalizmi ile ifade edilebilir. R. Clark Jones, 1941 ve 1948 yılları arasında optiksel sistemlerin dönüşümü için yeni bir hesaplama yöntemi geliştirmiştir [4]. Jones formalizmi, kutuplanma durumunun vektörel doğasını temel alarak, gelen ışığın, elektrik alan vektörüne bağlı kompleks vektörel uzayda, 2×2 'lik bir matris ile kutuplanma operatörünü tanımlamıştır. Jones formalizmi ışığın tamamen kutuplandığı durumlarda uygulanabilirken kısmen kutuplandığı durumlarda uygulanamaz. Bu nedenle, tamamen kutuplanmış olan ışığın optik sistemler tarafından depolarize edilmesini açıklayamaz. Depolarize ortamlar, ışığın kutuplanmasını engelleyen ya da kutuplu ışığı kutupsuz ışığa dönüştüren ortamlardır. Bu yüzden bu metodun uygulama alanı oldukça sınırlı olup heterojen malzemeler, pürüzlü yüzeyler ve genelde depolarize ortamlar için Stokes-Mueller formalizmi kullanılmalıdır.

Bu çalışmanın amacı, depolarize olmayan bir ortamda yayılan tamamen veya kısmen kutuplanmış ışığın ilerlemesini Mueller formalizmi çerçevesinde analitik olarak incelemektir.

Stokes-Mueller Formalizmi

Stokes vektörü ve Mueller matris formalizmlerinde z-yönünde ilerleyen ışığın kutuplanma durumunun değerlendirilmesi birinci derece lineer olmayan bir diferansiyel denklemlerle ifade edilir:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dz} = m\mathbf{S} \quad (1)$$

Burada \mathbf{S} , 4×1 'lik Stokes vektörü ve m ortamın yoğun (intensive) optiksel özelliklerini karakterize eden 4×4 'lük diferansiyel Mueller matrisidir [1]. Depolarize ortam için diferansiyel Mueller matrisi on altı bağımsız parametre ile ifade edilir. Bununla birlikte tek, lineer ve depolarize olmayan ortam için m yalnız yedi bağımsız parametre ile tanımlanır. Bu parametrelerin dördü ortamın izotropik ve anizotropik soğurma özelliklerini, diğer üç tanesi ise ortamın anizotropik kırılma özelliklerini ifade ederler. m matrisi genel formda,

$$m = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \mu & \nu \\ \gamma & -\mu & \alpha & \eta \\ \delta & -\nu & -\eta & \alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

ile verilir [6]. Buradaki parametreler ortamın ışığa karşı davranışını belirleyen optiksel parametreler olup α izotropik soğurma, η lineer kırıcılık, β lineer iki renklilik, γ x- ve y- eksenleri arasında 45° 'lik açı yapan eksen boyunca lineer iki renklilik, δ dairesel iki renklilik, μ dairesel çift kırıcılık, ν x- ve y- eksenleri arasında 45° 'lik açı yapan eksen boyunca lineer çift kırıcılık parametreleri olarak tanımlanmaktadır. Başlangıç noktasında ($z=0$), $\mathbf{S}(0)$ olmak üzere Denk.(1)'in çözümü olan yayılma Stokes vektörü $\mathbf{S}(z)$,

$$\mathbf{S}(z) = \exp(mz)\mathbf{S}(0) = M\mathbf{S}(0) \quad (3)$$

şeklinde dir. Denk.(3)'teki $\exp(mz)$ terimi, ortamın yaygın (extensive) özelliklerini belirleyen M Mueller matrisi olarak tanımlanır. İdeal bir keyfi soğurucu veya keyfi kırıcı anizotropik ortamlarda Mueller matrisin analitik formları Azzam tarafından 1978 yılında elde edilmiştir [6]. Diğer yandan Brown ve Bak, Azzam tarafından verilen aynı özel durumlar için Mueller matrisinin analitik ifadelerini Lorentz grup teorisine dayandıran bir formalizm geliştirmişlerdir [7]. Burada Denk.(1)'in çözümü Sylvester interpolasyon metodu ile elde edilir. Diferansiyel Mueller matrisi m 'nin öz değerleri, $\det|m - \lambda I| = 0$ karakteristik denklemden,

$$(\alpha - \lambda)^4 - (\alpha - \lambda)^2 [(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (\eta^2 + \mu^2 + \nu^2)] - (\beta\eta - \nu\gamma + \mu\delta)^2 = 0 \quad (4)$$

biçiminde hesaplanır. Burada I , 4×4 'lük birim matris olup m matrisi Denk.(2) ile verilmiştir. Denk.(4)'den m 'nin öz değerleri,

$$\lambda_1 = \alpha - \tau, \lambda_2 = \alpha + \tau, \lambda_3 = \alpha - i\Omega, \lambda_4 = \alpha + i\Omega \quad (5)$$

olarak bulunur. Burada çift kırıcılık ve iki renkliliği temsil eden Ω ve τ değerleri,

$$\tau = \left\{ \left[\left(\frac{(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (\eta^2 + \mu^2 + \nu^2)}{2} \right)^2 + (\beta\eta - \nu\gamma + \mu\delta)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} + \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (\eta^2 + \mu^2 + \nu^2)}{2} \quad (6a)$$

$$\Omega = \left\{ \left[\left(\frac{(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (\eta^2 + \mu^2 + \nu^2)}{2} \right)^2 + (\beta\eta - \nu\gamma + \mu\delta)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} - \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (\eta^2 + \mu^2 + \nu^2)}{2} \quad (6b)$$

şeklinde tanımlanır. Ortamın net çift kırıcılık ve net iki renklilik vektörleri $\mathbf{x} = \{\beta, \gamma, \delta\}$ ve $\mathbf{y} = \{\eta, -\nu, \mu\}$ olarak tanımlanan üç boyutlu iki vektör ile temsil edilir [5,6]. Burada Ω ve τ 'nin skaler büyüklükleri, ortamın fiziksel özellikleri olan etkin iki renkliliğine ve etkin çift kırıcılığına karşılık gelir ve \mathbf{x} ve \mathbf{y} 'nin skaler çarpımı Ω ve τ 'nin çarpımına eşit olur:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = \tau \Omega = |\beta\eta - \nu\gamma + \mu\delta| \quad (7)$$

Bu iki vektörün karelerinin farkı ise

$$|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 = \tau^2 - \Omega^2 = (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (\eta^2 + \nu^2 + \mu^2) \quad (8)$$

ile verilir. \mathbf{x} ve \mathbf{y} vektörlerinin skaler çarpımı, çift kırıcılık ve iki renklilik vektörleri arasındaki ilişkiyi belirler. Yani, \mathbf{x} ve \mathbf{y} vektörleri arasındaki ilişki,

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|} \quad (9)$$

dir. Burada θ ilişki açısına karşılık gelir ve Denk.(6a-b) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\tau^2 = \left[\left(\frac{|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2}{2} \right)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \right]^{1/2} + \left(\frac{|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2}{2} \right) \quad (10a)$$

$$\Omega^2 = \left[\left(\frac{|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2}{2} \right)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \right]^{1/2} - \left(\frac{|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2}{2} \right) \quad (10b)$$

Slyvester interpolasyon metodu üstel bir matrisin genel analitik formunu elde etmek için basit ve sistematik bir yöntemdir. $M = \exp(mz)$ Mueller matrisini çözmek için Slyvester interpolasyon yöntemi kullanılırsa,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \exp(\lambda_1 z) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \exp(\lambda_2 z) \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \exp(\lambda_3 z) \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \exp(\lambda_4 z) \\ I & m & m^2 & m^3 & \exp(mz) \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

elde edilir ve bu determinant son sütuna göre açılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \exp(mz)[(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ & - \exp(\lambda_4 z)[(m - \lambda_3 I)(m - \lambda_2 I)(m - \lambda_1 I)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ & + \exp(\lambda_3 z)[(m - \lambda_4 I)(m - \lambda_2 I)(m - \lambda_1 I)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ & + \exp(\lambda_2 z)[(m - \lambda_4 I)(m - \lambda_3 I)(m - \lambda_2 I)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)] \\ & - \exp(\lambda_2 z)[(m - \lambda_4 I)(m - \lambda_3 I)(m - \lambda_1 I)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

sonucu bulunur. Bu son denklem $\exp(mz)$ terimine göre çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} \exp(mz) = \exp(\lambda) & \frac{(m - \lambda_2 I)(m - \lambda_3 I)(m - \lambda_4 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \exp(\lambda_2) \frac{(m - \lambda_1 I)(m - \lambda_3 I)(m - \lambda_4 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \\ & + \exp(\lambda_3) \frac{(m - \lambda_1 I)(m - \lambda_2 I)(m - \lambda_4 I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} + \exp(\lambda_4) \frac{(m - \lambda_1 I)(m - \lambda_2 I)(m - \lambda_3 I)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \end{aligned} \quad (13)$$

ifadesi elde edilir. Bu noktada $C = m - \alpha \mathbf{I}$ olarak tanımlanan anizotropik matris ile başlanırsa M matrisi,

$$\begin{aligned} M = \exp(mz) = \exp(\lambda) & \frac{(C - \Omega i I)(C + \Omega i I)(C - \mathcal{d})}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \exp(\lambda_2) \frac{(C - \Omega i I)(C + \Omega i I)(C + \mathcal{d})}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \\ & + \exp(\lambda_3) \frac{(C - \mathcal{d})(C + \mathcal{d})(C - \Omega i I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} + \exp(\lambda_4) \frac{(C - \mathcal{d})(C + \mathcal{d})(C + \Omega i I)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \end{aligned} \quad (14)$$

şeklini alır. Burada λ değerleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} M = & \frac{\exp(\alpha z)}{(\tau^2 + \Omega^2)} \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{-C^3 - \Omega^2 IC + \mathcal{d}C^2 + \mathcal{d}\Omega^2}{\tau} \right) \frac{\exp(-\tau z)}{2} + \left(\frac{C^3 + \Omega^2 IC + \mathcal{d}C^2 + \mathcal{d}\Omega^2}{\tau} \right) \frac{\exp(\tau z)}{2} \\ & + \left(\frac{C^3 - \tau^2 IC - \Omega i IC^2 + \Omega i \tau^2}{i\Omega} \right) \frac{\exp(-i\Omega z)}{2} + \left(\frac{-C^3 + \tau^2 IC - \Omega i IC^2 + \Omega i \tau^2}{i\Omega} \right) \frac{\exp(i\Omega z)}{2} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

sonucuna ulaşılır. Yukarıdaki ifadede

$$C^3 = (\tau^2 - \Omega^2)C + \tau^2 \Omega^2 C^{-1} \quad (16)$$

değeri yerine yazıldığında ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında aşağıdaki M Mueller matrisi elde edilir:

$$M = \frac{\exp(\alpha z)}{(\tau^2 + \Omega^2)} \left\{ \begin{aligned} & \left[\Omega^2 \cosh(\tau z) + \tau^2 \cos(\Omega z) \right] I + \left[\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z) \right] C^2 \\ & + \left[\tau \sinh(\tau z) + \Omega \sin(\Omega z) \right] C + \left[\tau \Omega \left[\Omega \sinh(\tau z) - \tau \sin(\Omega z) \right] \right] C^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Bu matris ifadesi Denk.(3)'de kullanıldığında Denk.(1)'in genel çözümleri bulunabilir. Böylece keyfi anizotropik değerlere sahip bir ortam boyunca yayılan ışığın Stokes vektörünün yola bağlı değişimi belirlenebilir [9-11].

Çift Kırıcılık ve İki Renklilik Arasındaki İlişki

Denk.(17)'deki α , izotropik soğurma parametresi olup $\exp(\alpha z)$ şeklinde üstel bir faktördür ve ışığın kutuplanma durumundan etkilenmez. Kutuplanma durumu, biri osilatör diğeri hiperbolik iki kısmın toplamına bağlı olarak ele alınabilir. Osilatör bölümü Stokes vektörünün rad/m birimlerinde titreşimlerin frekansını temsil eden Ω parametresinin bir fonksiyonudur. Böylece bu parametre $\Omega = 2\pi/T$ ile ortamın etkin çift kırıcılığı olarak tanımlanır ve Stokes parametrelerinin herhangi titreşimlerinin T periyodundan ölçülebilir. Diğer yandan hiperbolik bölümü rad/m cinsinden, doyum faktörü olarak rol oynayan τ parametresinin bir fonksiyonudur. Bu parametre, ayrı olarak ölçülebilir ve ortamın etkin iki renkliliği olarak adlandırılır. Nokta çarpımın sıfır veya sıfır olmayan değerine, yani \mathbf{x} ve \mathbf{y} vektörleri arasındaki ilişkinin sıfır ve sıfır olmama durumuna göre, iki durum ortaya çıkar. Bu iki durumun her biri için çift kırıcılık ve iki renklilik vektörlerinin büyüklüklerine göre üç özel durum tanımlanır ve bu durumlar $|\mathbf{x}|=|\mathbf{y}|$, $|\mathbf{x}|<|\mathbf{y}|$ ve $|\mathbf{x}|>|\mathbf{y}|$ şeklinde belirtilir. Bu altı durum, Denk.(17) ile tanımlanan herhangi bir ortam boyunca yayılan Stokes vektörünün davranışını verir. Çizelge 1 ve 2'de \mathbf{x} ve \mathbf{y} vektörleri arasındaki ilişkinin varlığı ve yokluğu için ana özellikler verilmiş ve aşağıda ayrıntılı olarak işlenmiştir. İlk üç durum ilişki olmadığı duruma karşılık gelir. Bu da, çift kırıcılık ve iki renklilik vektörlerinin birbirlerine dik olduğu anlamını taşır.

Çizelge 1 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ durumunda çift kırıcılık ve iki renklilik vektörleri arasındaki ilişki

I. Durum	II. Durum	III. Durum
$ \mathbf{x} = \mathbf{y} $	$ \mathbf{x} < \mathbf{y} $	$ \mathbf{x} > \mathbf{y} $
$\tau = 0$	$\tau = 0$	$\tau = \sqrt{ \mathbf{x} ^2 - \mathbf{y} ^2}$
$\Omega = 0$	$\Omega = \sqrt{ \mathbf{y} ^2 - \mathbf{x} ^2}$	$\Omega = 0$
Polinom davranış	Sinüzoidal davranış	Hiperbolik davranış
$ \mathbf{x} = \mathbf{y} =0$ Lambert Kanunu	$ \mathbf{y} =0$ zayıf çift kırıcılık	$ \mathbf{x} =0$ zayıf iki renklilik

Çizelge 2 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$ durumunda çift kırıcılık ve iki renklilik vektörleri arasındaki ilişki

IV. Durum	V. Durum	VI. Durum
$ \mathbf{x} = \mathbf{y} $	$ \mathbf{x} < \mathbf{y} $	$ \mathbf{x} > \mathbf{y} $
$\tau = \Omega$	$\tau < \Omega$	$\tau > \Omega$
$\Omega = \tau = \sqrt{ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} }$	Hiperbolik+sinüzoidal davranış	Hiperbolik davranış
Hiperbolik+sinüzoidal davranış		

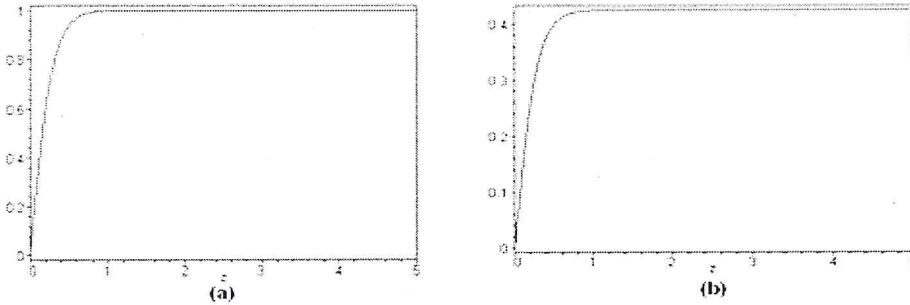
I. Durum (Polinom Davranış): Denk.(10a-b)'ye göre bu durumda $\Omega = 0$ ve $\tau = 0$ olduğu görülür. Böylece Denk.(5)'de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ve λ_4 öz değerlerinin her biri α' ya eşit olur. Bu değerler Denk.(17)'de kullanılır ve sonuçta elde edilen ifade Denk.(3)'de yerine konulursa,

$$S(z) = \exp(\alpha z) \left[I + C + \frac{1}{2i} C^2 \right] S(0) \quad (18)$$

ifadesi elde edilir. Stokes vektörünün davranışını değerlendirmek için anizotropik ortama gelen doğal (yani, kutuplanmamış) ışığı $S(0) = \{1, 0, 0, 0\}$ Stokes vektörü ile temsil edelim ve ortamın iki renklilik ve çift kırıcılık vektörlerini $\mathbf{x} = \{2, 0; 2, 5; 1, 5\}$ ve $\mathbf{y} = \{2, 0; -2, 5; 1, 5\}$ olarak seçelim. Şekil 1(b)'de, dairesel kutuplanma derecesinin ortam içerisinde alınan yol ile değişim grafiği gösterilmiştir. Kutuplanma derecesi ve lineer kutuplanma için de benzer sonuçlar elde edilir. Toplam kutuplanma derecesi,

$$P = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0} \quad (19)$$

olup Şekil 1(a)'da gösterildiği gibi, asimptotik olarak hiperbolik eğriye benzer bir davranış gösterir. Bu sonuç, uzun bir yayılmadan sonra doğal ışığın tam olarak kutuplandığını gösterir. $|x|=|y|=0$ özel durumu için sıfır iki renklilik ve sıfır çift kırıcılık, izotropik soğurma faktörünün üsteli ile birim matrisin çarpımı haline dönüşür. Bu sonuç, $C=0$ anizotropik sıfır matrisine sahip izotropik soğurma ve izotropik kırılma ortamına dönüşür ve dolayısıyla Lambert kanununu olarak bilinir.

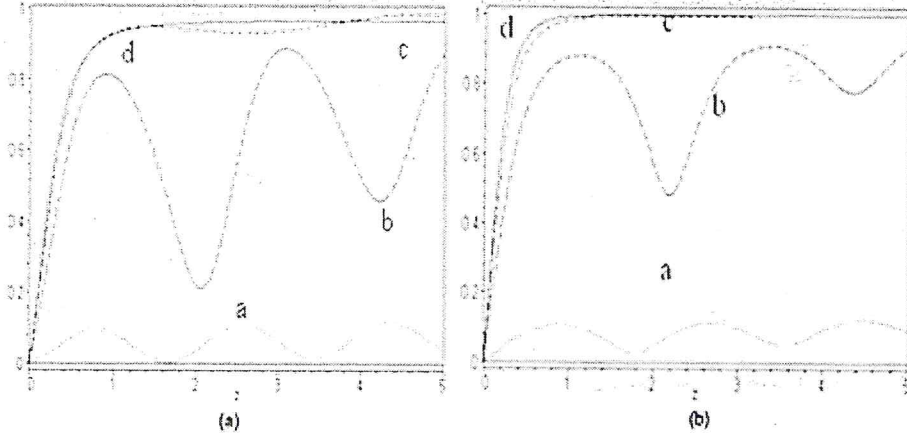


Şekil 1 (a) Kutuplanma derecesinin, (b) Dairesel kutuplanma derecesinin ortam içerisinde alınan yol ile değişimi.

II. Durum (Sinüzoidal Davranış): Denk.(10a)'da, birinci terim ve ikinci terim aynı büyüklükte ve negatiftir. Dolayısıyla, $\tau=0$ ve $\Omega = \sqrt{|y|^2 - |x|^2}$ olarak elde edilir. Bu iki sonuç Denk.(5)'de yerine konulduğunda $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$, $\lambda_3 = \alpha - i\Omega$ ve $\lambda_4 = \alpha + i\Omega$ değerleri elde edilir. Bu öz değerler, (17) ve (3) denklemlerinde kullanıldığında Stokes vektörü,

$$\mathbf{S}(z) = \frac{\exp(\alpha z)}{\Omega^2} \{ \Omega^2 I + \Omega C \sinh(\Omega z) + C^2 (1 - \cosh(\Omega z)) \} \mathbf{S}(0) \quad (20)$$

biçiminde elde edilir. $|x| < |y|$ şartı sağlanacak şekilde $r = |x|/|y|$, ($0 < r < 1$) tanımını yapalım. $r=0,05; 0,55; 0,85$ ve 1 için, $\mathbf{S}(0) = \{1, 0, 0, 0\}$, $\mathbf{x} = r\{2, 0; 2, 5; 1, 5\}$ ve $\mathbf{y} = \{2, 0; -2, 5; 1, 5\}$ değerleri Denk.(20)'de kullanılırsa, dairesel kutuplanma derecesi için Şekil 2(a)'da gösterilen a, b, c ve d eğrileri elde edilir. Bu durumda net iki renkliliğin olmadığı görülür. Şekil 2(a)'da titreşim genliğinin 0 olduğu gözlemlenebilir. Bu genlik, net iki renkliliğin net çift kırıcılığa oranı 1'e yaklaştığında eğri hiperbolik davranış gösterir. Burada Denk.(20)'de $\alpha=0$ ve $|x|=0$ olarak kabul edilirse, zayıf çift kırıcılık ile temsil edilen ortam için Azzam tarafından 1978 yılında elde edilen çözümlere eşdeğer bir ifade bulunur. Kutuplanma derecesi için, Denk.(19)'da genlik ve titreşim periyodu, net iki renklilik ve net çift kırıcılık oranının farklı değerlerine göre değişir. Şekil 2(a)'da a, b, c ve d eğrilerinden görüldüğü



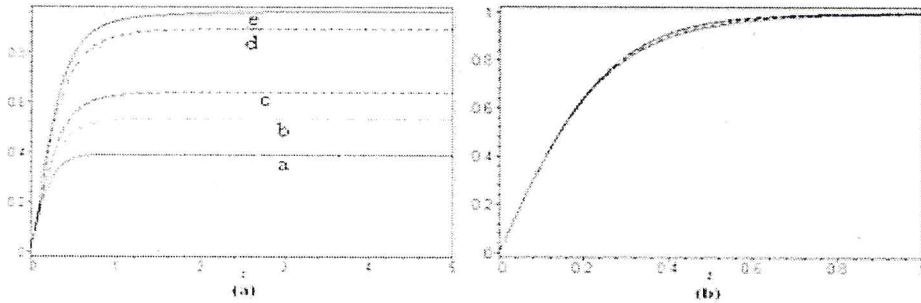
Şekil 2 (a) Dairesel kutuplanma derecesinin (b) kutuplanma derecesinin ortam içerisinde alınan yol ile değişimi.

gibi, oran sıfır olduğunda genlik sıfırdır (a eğrisi). Oran, 1 değerine çıkarsa genlik 1 değerine kadar çıkar (d eğrisi). Öyle ki oran 1 değerini alırsa, yukarıda I. durumda belirtilene benzer bir eğri elde edilir. Kutuplanma için de Şekil 2(b)'de verilen grafikler elde edilir.

III. Durum (Hiperbolik Davranış): Denk.(10a-b)'den $\Omega = 0$ ve $\tau = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2}$ sonuçları elde edilir ve bu iki sonuç Denk.(5)'de kullanıldığında $\lambda_1 = \alpha - \tau$, $\lambda_2 = \alpha + \tau$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \alpha$ bulunur. Bu ifadeler, (17) ve (3) denklemlerinde kullanıldığında aşağıdaki Stokes vektörü elde edilir:

$$\mathbf{S}(z) = \frac{\exp(\alpha z)}{\tau^2} \{ \tau^2 I + \tau C \sinh(\tau z) + C^2 (\cosh(\tau z) - 1) \} \mathbf{S}(0) \quad (21)$$

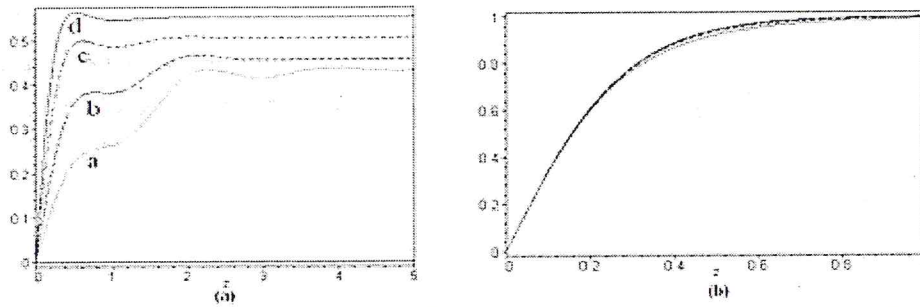
Denk.(21)'de, $r = 0,09; 0,24; 0,42; 0,70; 0,98$, $\mathbf{S}(0) = \{1, 0, 0, 0\}$, $\mathbf{x} = \{2,0; 2,5; 1,5\}$ ve $\mathbf{y} = r\{2,0; -2,5; 1,5\}$ değerleri kullanılarak elde edilen ve hiperbolik davranan dairesel kutuplanma eğrileri Şekil 3(a)'da gösterilmiştir. Buna karşılık, kutuplanma derecesinin davranışı, Şekil 3(b)'de gösterildiği gibi, birbirlerine çok yakın dört çizgi şeklindedir. Yukarıda sözü edilen I. durumda ifade edildiği gibi $r = 1$ değerine karşılık elde edilen eğriye benzer eğri elde edilir. Yani, kutuplanma derecesi bu durum için (τz) 'nin hiperbolik eğrisine benzerdir. Diğer üç durum, \mathbf{x} ve \mathbf{y} vektörlerinin birbirine dik olmaması, dolayısıyla vektörler



Şekil 3 (a) Dairesel kutuplanma derecesinin, (b) Kutuplanma derecesinin ortam içerisinde alınan yol ile değişimi.

arasındaki ilişkinin sıfır olmaması (yani, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$) durumunda, bu ilişkinin büyüklüğü Denk.(9) kullanılarak belirlenir. Bu durumlar için genel bir basitleştirme yapılmaz ve öz değerler, Denk.(5) ile ifade edilir.

IV. Durum (Hiperbolik + Sinüzoidal Davranış) : Denk.(10a-b)'den $\tau = \Omega = \sqrt{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|} = |\mathbf{y}| \sqrt{\cos(\theta)}$ olarak elde edilir. Buradan, (17) ve (3) denklemlerine göre Stokes vektörü ifade edilebilir. Burada ortama gelen ışığın Stokes vektörü $\mathbf{S}(0) = \{1, 0, 0, 0\}$, $\mathbf{x} = \{1,5; 2,0; 2,5\}$ ve $\mathbf{y} = \{2,0; -2,5; 1,5\}$ değerleri kullanılarak dairesel kutuplanma derecesinin alınan yol ile değişimi, $\cos(\theta) = 0,10; 0,24; 0,42; 0,70$ ve $0,98$ değerlerine karşılık Şekil 4(a)'da verilen a-d eğrileri ile gösterilmiştir. Hem Şekil 4(a) hem de Şekil 4(b) den görüldüğü gibi, tam ilişki değeri bire yaklaştığında, τ 'nun doyum uzunluğunun değeri azalır.



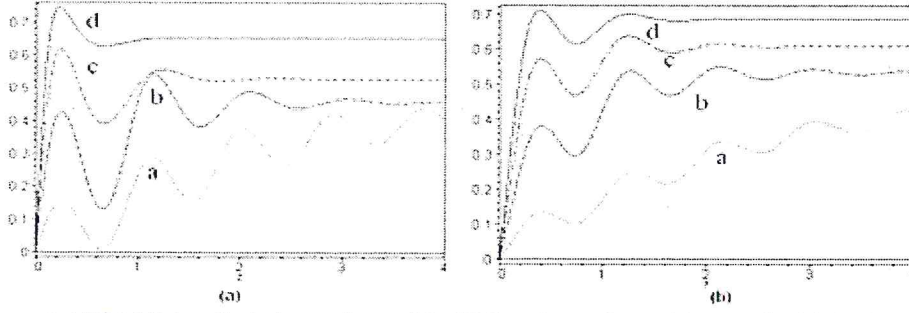
Şekil 4 (a) Dairesel kutuplanma derecesinin, (b) Kutuplanma derecesinin ortam içerisinde alınan yol ile değişimi.

V. Durum (Hiperbolik + Sinüzoidal Davranış) : Bu durumda Stokes vektörünün davranışını gözlemlemek amacıyla Denk.(9) kullanılarak (10) denklemleri yeniden yazabilir:

$$\tau^2 = \frac{|\mathbf{y}|^2}{2} \left\{ \left[(r^2 - 1)^2 + [2r \cos(\theta)]^2 \right]^{1/2} - 1 + r^2 \right\} \quad (22a)$$

$$\Omega^2 = \frac{|\mathbf{y}|^2}{2} \left\{ \left[(r^2 - 1)^2 + [2r \cos(\theta)]^2 \right]^{1/2} + 1 - r^2 \right\} \quad (22b)$$

Bu ifadeler etkin iki renklilik ve net çift kırıcılık için ilişkinin $\cos(\theta)$ ve r değerlerine bağlı olduğunu gösterir. Burada $\tau < \Omega$ ve $0 < r < 1$ şartları göz önüne alınarak hesaplamaların yapılması zorunludur. Gelen ışığın Stokes vektörü $\mathbf{S}(0) = \{1, 0, 0, 0\}$, $\mathbf{x} = \{2,0000; 2,5000; 1,5001\}$ ve $\mathbf{y} = \{2,0; -2,5; 1,5\}$ değerlerine karşılık Stokes vektörü (17) ve (3) denklemlerine göre hesaplandığında, dairesel kutuplanma derecesinin ortam içerisinde alınan yol ile değişim grafiği için Şekil 5(a)'da ki a-d eğrileri elde edilir. Burada $r = 0,09; 0,24; 0,42; 0,70$ ve $0,98$ ve r 'nin daha küçük ilişki değerlerine karşılık gelen her hangi bir yayılmada osilatör davranışı görülür (a ve b eğrileri). İlişki değerleri artarsa, renklilik etkileri baskın hale gelir ve gözlenen osilatör davranışı sıfıra gider (c ve d eğrileri). İlişki azaldıkça etkin iki renklilik azalır ve bunun yansıması olarak da osilatör genliğinin sönümü artar. İlişkinin daha büyük değerleri için kutuplanma derecesinin davranışı III. durumda tanımlanan davranışa benzer biçimde ortaya çıkar.



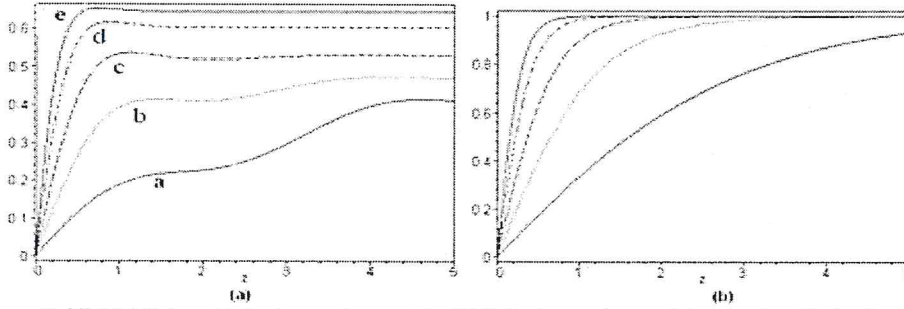
Şekil 5 (a) Dairesel kutuplanma derecesinin, (b) Kutuplanma derecesinin ortam içerisinde alınan yol ile değişimi.

VI. Durum (Hiperbolik Davranış): Denk.(10a-b),

$$\tau^2 = \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} \left\{ \left[(r^{-2} - 1)^2 + [2r^{-1} \cos(\theta)]^2 \right]^{1/2} + 1 - r^{-2} \right\} \quad (23a)$$

$$\Omega^2 = \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} \left\{ \left[(r^{-2} - 1)^2 + [2r^{-1} \cos(\theta)]^2 \right]^{1/2} - 1 + r^{-2} \right\} \quad (23b)$$

olacak şekilde $\cos(\theta)r^{-1} = |\mathbf{y}|/|\mathbf{x}|$ oranına bağlı olarak üçüncü durumda tanımlandığı gibi yeniden yazılabilir. $\mathbf{S}(0) = \{1, 0, 0, 0\}$, $\mathbf{x} = r\{1, 5; 2, 0; 2, 5\}$ ve $\mathbf{y} = \{1, 00; -1, 25; 0, 75\}$ değerlerine karşılık dairesele kutuplanma derecesinin ortam içerisinde alınan yol ile değişimi Şekil 6(a)'da a-e eğrileri ile verilmiş ve ilişki değerleri için $\cos(\theta) = 0,10; 0,24; 0,42; 0,70$ ve 1 alınmıştır. Dikkat edilirse etkin iki renklilik etkin çift kırıcılıktan daha büyüktür. Böylece Şekil 6(a)'da osilatör davranışın olmadığı gözlenir. Bu durumda kutuplanma derecesinin eğrileri, alınan ilişki değerlerinin artan değerlerine rağmen miktarlarında büyük farklılıklar göstermez.



Şekil 6 (a) Dairesel kutuplanma derecesinin, (b) Kutuplanma derecesinin ortam içerisinde alınan yol ile değişimi.

Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışmada depolarize olmayan bir anizotropik ortam boyunca yayılan tamamen veya kısmen kutuplanmış ışığın ilerlemesi için Mueller formalizmi olarak genel analitik bir çözüm verildi. Bu tip ortam, yedi bağımsız parametre içeren diferansiyel Mueller matrisi ile temsil edilebilir. Tam çözüm Sylwester'in interpolasyon metodu kullanılarak elde edildi ve skaler büyüklükler kullanılarak etkin iki renklilik ve etkin çift kırıcılık tanımlandı. Verilen herhangi diferansiyel Mueller matrisi için bu vektörler, iki renklilik ve çift kırıcılık vektörleri olarak tanımlanabilir. Bu iki vektör arasındaki ilişki, vektörlerin skaler çarpımı yardımıyla nitelendirilebilir. Burada vektörlerin skaler çarpımına göre bu iki vektör arasındaki ilişki belirlenebilir. Eğer çarpım sıfır ise bu iki vektör bir birine dik ve ilişki yok, çarpım sıfırdan farklıysa vektörler birbirine dik değildir ve aralarında bir ilişki vardır. Sonuçta, her iki durum için 3 tane olmak üzere toplam olası altı bağımsız durum söz konusudur. Bu altı durum net iki renkliliğin net çift kırıcılığa eşit, küçük ve daha büyük olması durumlarını temsil eder.

Burada, bu iki vektör arasındaki büyüklük ilişkisinden yola çıkarak, tüm olası altı bağımsız durum için ışığın depolarize anizotropik bir ortamda yayılması Mueller formalizmi çerçevesinde incelendi. Tüm kutuplanma durumları ışığın ortam içerisinde yayılma uzaklığına bağlı olarak analiz edildi. Dairesel kutuplanma durumu ve toplam kutuplanma derecelerinin ortam içerisinde alınan yol ile değişim grafikleri altı ayrı durum için değerlendirildi.

Kaynaklar

1. Shute, M.W, Brown, C.S., **Polarization Model for a Helically Wound Optical Fiber**, J Opt. Soc. Am. **A14**: (1997)251-3261.
2. Bueno, J.M., **Indices of Linear Polarization for An Optical System**, J. Opt. A: Pure Appl. Opt., **3**: (2001)470 – 476.
3. Born, M., Wolf, E., **Principles of Optics**, Pergamon Press, New-York, 1965.
4. Jones, R.C., **A New Calculus for The Treatment of Optical Systems**, J. Opt. Soc. Am., **31**: (1941)500-503.
5. Mosino, J.F., Barbosa-Garcia, O., Starodumov, A., Diaz-Torres, L.A., Meneses-Nava, M.A., Vega-Duran, J.T., **Evolution of Partially Polarized Light Through Non- depolarizing Anisotropic Media**, Optic Communacations, **173**: (2000)57-71.
6. Azzam, R.M.A, **Propagation of Partially Polarized Light Through Anizotropic Media with or without Depolarization: A Differential 4 x 4 Matrix Calculus**, J. Opt . Soc. Am, **68**: (1978)1756-1767.
7. Brown, C.S., Bak, A.E., **Unified Formalism for Polarization Optics with Application to Polarimetry on a Twised Optical Fiber**, Opt. Eng. (1995)1625.
8. Azzam, R.M.A., Bashara, N.M., **Elipsometry and Polarized Light**, North- Holland, 1989.
9. Gerrard, A., Burch, J.M., **Introduction to Matrix Method in Optics**, John Wiley and sons, (1975).
10. Ogata, K., **Modern Control Engineering**, Prentice-Hall, New York, 1970.
11. Mosino, J.F., Starodumov, A., Barbosa-Garcia, O., Filippov, V.N., **Propagation of Partially Polarized Light in Dichroic and Birefringent Media**, J. Opt. B: Quantum and Semiclassical Optics, **3**: (2001)159-165.
12. Cariou, J., Le Jeune, B., Lotrian, J., Guern, Y., **Polarization Effects of Seawater and Underwater Targets**, Applied Optics, **29**:(1990)1689-1695.