Konya İli Ağustos Ayı Maksimum Rüzgâr Hızı Verilerinin Uç Değer Dağılımlarından Frechet Dağılımı İle Modellenmesi

Neriman KARADAYI*, M. Fedai KAYA

Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, Kampüs, Konya

Özet: Bu çalışmada, maksimum ve minimum istatistiklerine ilişkin uç değer dağılımları incelenerek, Konya ilinin belirli yıllara ilişkin ağustos ayı maksimum rüzgâr hızı verileri uç değer dağılımlarından Frechet Dağılımı ile modellenmiştir. Frechet Dağılımının parametreleri için En Küçük Kareler ve Momentler Yöntemleri kullanılarak tahmin ediciler bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Maksimum ve minimum istatistikler, Uç değer dağılımı, Frechet Dağılımı

Modelling Maximum Wind Speed Data of August Month in Konya from Extreme Value Distributions

Abstract: In this study, by evaluating extreme value distributions according to maximum and minimum statistics, maximum wind speed data of august month related to certain years of Konya city is modelled using Frechet distribution from extreme value distributions. For the parameters of Frechet distribution, parameter estimators are found by using Least Squares and Moments methods.

Key Words: Maximum and minimum statistics, extreme value distribution,Frechet distribution

* E-mail: nkaradayi@selcuk.edu.tr

1. Giriş

Olasılık uç değer teoremi bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerin maksimum ve minimumlarının asimptotik dağılımları ile ilgilenir.

Çalışma sahası tarihsel olarak oldukça eskiye gitmesine rağmen 1920'li yıllarda Fuller, Griffith ve Von Bortkiewcz'in çalışmalarıyla hız kazanmıştır. 1923'de Mises, dağılımın beklenen değerini ve 1927'de Frechet, en büyük sıra istatistiği için mümkün limit dağılımlarını tanımlamıştır. 1928'de Fisher ve Tippet 3 çeşit limit dağılımı (Gumbel dağılımı, Weibull dağılımı ve Frechet dağılımı) olduğunu göstermiştir. Bu yıllarda yapılan bu teorik gelişmeler insan yaşam zamanı dağılımı ve radyoaktif emisyonların dağılımı (Gumbel (1937 a,b)), maddelerin kuvveti üzerine (Weibull (1939)), akışkan analizi (Gumbel (1941, 1944, 1945, 1949a), Rantz ve Riggs (1949)), sismik analiz üzerine (Nordquist (1945)), yağmur analizi üzerine (Potter (1949)) tarafından uygulanarak yapılmıştır. Gumbel uç değer teoremini belli dağılımlara uydurarak mümkün uygulamalarını mühendisler ve istatistikçiler için geliştirmiştir. Bu uygulamalar ilk 1941'de USA'de meteorolojik olaylar, seller vb. olaylar için yapılmıştır. Ürün çeşitliliği ile uç değer dağılımları arasındaki ilişki ilk olarak İngiliz Pamuk Endüstri Birliği için F.T. Peirce (1926) tarafından ortaya çıkartılmıştır. Materyallerin gücü için benzer düşünceler ise İsviçreli bir fizikçi ve mühendis olan W.Weibull (1939) tarafından geliştirilmiştir ([5]).

2. Uç Değer Dağılımları

Bir dağılımın maksimum ve minimum değerleri o dağılımın uç değerlerini oluşturur. Uç değer dağılımları özellikle tabii olayların ve mühendislik problemlerinin çözümünde (modellenmesinde) önemli rol oynamaktadır. Uzun yıllar boyunca istatistiğin ve matematiğin önemli çalışma sahalarından birini oluşturmuştur. Örneklemin çekildiği kitlenin dağılımı ve örneklemin büyüklüğünün bilinmesi durumunda sıra istatistiklerinin dağılımları kolaylıkla elde edilir. Fakat uygulamada genellikle örneklem büyüklüğünün bilinmemesi, örneklemin çekildiği kitlenin dağılımının bilinmemesi veya örneklem hacminin çok büyük olması durumunda sıra istatistiklerinin dağılımlarının oluşturmasında güçlükler ortaya çıkar. Bağımsız ve aynı dağılıma sahip bir kitle ya da örneklem yukarıda sayılan durumlardan herhangi birini içeriyorsa uç değerler için asimptotik dağılımlar olan Gumbel, Weibull ya da Frechet dağılımlarından uygun olan kullanılır. Bu nedenle, bu üç dağılım uç değer problemlerinde önemli bir rol oynar.

2.1. Frechet Dağılımı

Maksimum ve minimum için Frechet dağılımının dağılım fonksiyonları μ, $\sigma > 0$ ve $\beta > 0$ sırasıyla konum, ölçek ve şekil parametreleri olmak üzere sırasıyla,

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\dfrac{\sigma}{x-\mu}\right)^{\beta}\right] & ; \quad x \geq \mu \\ 0 & ; \quad \text{diger yerlerde} \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\underline{F}(x) = \begin{cases} 1-\exp\left[-\left(\dfrac{\sigma}{\mu-x}\right)^{\beta}\right] & ; \quad x \leq \mu \\ 1 & ; \quad \text{diger yerlerde} \end{cases} \tag{2.2}$$

şeklinde verilir. Bunlara ait olasılık yoğunluk fonksiyonları ise,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\sigma}\left(\dfrac{\sigma}{x-\mu}\right)^{\beta+1} \exp\left[-\left(\dfrac{\sigma}{x-\mu}\right)^{\beta}\right] & ; \quad x \geq \mu \\ 0 & ; \quad \text{diger yerlerde} \end{cases} \tag{2.3}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\sigma}\left(\dfrac{\sigma}{\mu-x}\right)^{\beta+1}\exp\left[-\left(\dfrac{\sigma}{\mu-x}\right)^{\beta}\right] & ; \quad x\le\mu \\ 0 & ; \quad \text{diger yerlerde}\end{cases} \tag{2.4}$$

şeklindedir ([1]).

3. Frechet Dağılımının Parametreleri ve Tahmin Edicileri

Frechet dağılımına ait maksimum ve minimum sıra istatistikleri için parametreleri aşağıdaki tabloda özetleyebiliriz.

Tablo 1. Frechet Dağılımının Bazı Parametreleri

Dağılım Fonksiyonları / **Parametreler**	$F(x)=\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x-\mu}\right)^{\beta}\right]$ **(Maksimum)**	$F(x)=1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\mu-x}\right)^{\beta}\right]$ **(Minimum)**
Orta lama	$\mu+\sigma\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$; $\beta>1$	$\mu-\sigma\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$; $\beta>1$
Varyans	$\sigma^2\left[\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right]$ $\beta>2$	$\sigma^2\left[\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right]$ $\beta>2$

Frechet dağılımının parametrelerinin tahmini için momentler ve en küçük kareler yöntemi kullanılacaktır.

3.1. Momentler yöntemi

$\overline{X}$ ve S_X^2 sırasıyla örneklem ortalaması ve varyansı olmak üzere örneklem ortalamasını kitle ortalamasına ve örneklem varyansını da kitle varyansına eşitleyerek

$$\overline{X}=\mu+\sigma\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right) \tag{3.1}$$

$$S_X^2=\sigma^2\left[\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right] \tag{3.2}$$

denklemleri elde edilir. (3.1) ve (3.2)'den moment tahmin edicileri,

$$\hat{\sigma}=\frac{\overline{X}-\hat{\mu}}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\hat{\beta}}\right)} \tag{3.3}$$

$$S_X^2=\left(\overline{X}-\hat{\mu}\right)^2\left[\frac{\Gamma\left(1-\frac{2}{\hat{\beta}}\right)}{\Gamma^2\left(1-\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}-1\right] \tag{3.4}$$

şeklinde elde edilir.(3.4) eşitliği, β'yı nümerik olarak elde etmek için kullanılır. Buradan β'nın tahmin edicisi elde edilerek (3.3) denkleminde yerine konursa σ'nın tahmin edicisi elde edilir (1).

3.2. En küçük kareler yöntemi

$\mu=0$ olması durumunda (2.1) formundaki Frechet dağılımının dağılım fonksiyonunun her iki taraftan iki kez doğal logaritması alınarak lineer hale

$$\log\left\{\log[F(x)]^{-1}\right\}=\beta\log(\sigma)-\beta\log(x) \tag{3.5}$$

şeklinde getirilir. $X_1, X_2, ..., X_n$ Frechet dağılımına sahip n birimlik bir örneklem ve $x_{1:n} < x_{2:n} < \cdots < x_{n:n}$ bu örneklemin sıra istatistiklerine ait gözlem değerleri olsun. O zaman (3.5) ifadesi

$$\log\{\log[F(x_{i:n})]^{-1}\} = \beta \log(\sigma) - \beta \log(x_{i:n}), \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{3.6}$$

şeklinde düşünülebilir. Burada $F(x_{i:n})$ için farklı tahmin ediciler vardır (4). Tablo 2'deki beş metottan biri $F(x_{i:n})$' yi tahmin etmek için kullanılabilir.

Tablo 2. $F(x_{i:n})$' in tahmin edicileri

Metotlar	$\hat{F}(x_{i:n})$
Bloom	$(i-3/8)(n+1/4)^{-1}$
Rankit (Modified Kaplan-Meier)	$(i-1/2)n^{-1}$
Tukey	$(i-1/3)(n+1/3)^{-1}$
Van der Waerden (Herd-Johnson)	$i(n+1)^{-1}$
Kaplan-Meier	in^{-1}

Van der Waerden' in metodu (3.6)' da kullanılırsa ve ε_i hata terimi de eklenirse

$$\log\{\log[(n+1)/i]\} = \beta \log(\sigma) - \beta \log(x_{i:n}) + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{3.7}$$

lineer regresyon modeli elde edilir.
Regresyon modelinde gözlemlerdeki hatalar bağımsız, sıfır ortalamalı ve sabit varyanslı bir dağılıma sahip olması durumunda en küçük kareler tahmin edicisi minimum varyanslı ve yansızdır(UMVUE) ([3]).(3.7)'den β ve σ parametrelerinin en küçük kareler tahmin edicileri sırasıyla , $\hat{\beta}$ ve $\hat{\sigma}$

$$\hat{\beta} = -\frac{n\sum_{i=1}^{n}\log(X_{i:n})\log\left[\log\left(\frac{n+1}{i}\right)\right] - \sum_{i=1}^{n}\log(X_{i:n})\sum_{i=1}^{n}\log\left[\log\left(\frac{n+1}{i}\right)\right]}{n\sum_{i=1}^{n}[\log(X_{i:n})]^2 - \left[\sum_{i=1}^{n}\log(X_{i:n})\right]^2} \tag{3.8}$$

$$\hat{\sigma} = \exp\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\log\left[\log\left(\frac{n+1}{i}\right)\right]}{n\hat{\beta}} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\log(X_{i:n})}{n}\right] \tag{3.9}$$

dır ([1]).

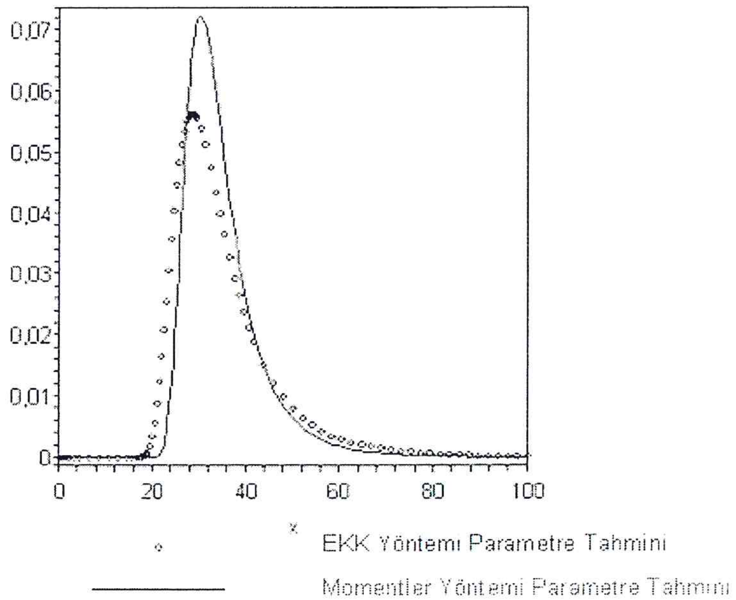
4. Uygulama

Meteoroloji Genel Müdürlüğünden alınan Konya iline ilişkin 1997,1999-2002 yıllarına ait ağustos ayı her bir gün için maksimum rüzgâr hızlarının Frechet dağılımına uygunluğu varsayılarak parametreleri, momentler yöntemi ve en küçük kareler yöntemi kullanılarak tahmin edilerek sonuçları aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

Tablo 3. Parametre Tahminleri

Momentler Yöntemi		**En Küçük Kareler Yöntemi**	
$\hat{\sigma}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\beta}$
30,88368	5,981164	29,6917	4,434435
Ortalama	**Varyans**	**Ortalama**	**Varyans**
34,88	76,92	35,46	170.133

En küçük kareler yöntemiyle bulunan parametre tahmin sonucuna göre maksimum rüzgâr hızlarına ilişkin verilerin Frechet dağılımına uygunluğunu test etmek amacıyla yapılan Kolmogorov-Smirnov testi sonucunda *D* istatistiği 0,13080944 olarak bulunmuştur. %1 anlam seviyesine göre Konya iline ilişkin 1997, 1999–2002 yıllarına ait ağustos ayı her bir gün için maksimum rüzgâr hızı verileri Frechet Dağılımına uygundur.
Her iki yöntem ile bulunan parametre tahminlerine göre Frechet Dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri çizilmiştir.



Şekil 1. Parametre tahminlerine göre Frechet Dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri

5. Kaynaklar

1. Castillo, E. (1988). **Extreme Value Theory in Engineering**.Academic Press, London.
2. David, H. (1970). **Order Statistics**. John Wiley, New York.
3. Draper, N.R., Smith, H. (1966) **Applied Regression Analysis.** John Wiley&Sons, Inc.,New York
4. Kotz, S., Johnson, N.L. eds.1988 **Encyclopedia of Statistical Sciences**, John Wiley & Sons, Inc., New York
5. Kotz, S., Nadarajah S. (2000) **Extreme Value Distributions: Theory and Applications**. Imperial College Press., London