

## Harmonik Olarak Tuzaklanmış Bozonlarda Bose-Einstein Yoğuşması

Teoman ÖZTÜRK\*, Ülfet ATAV

Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü Kampüs Konya

**Özet:** Bu çalışmada anizotropik bir tuzakta harmonik olarak tuzaklanmış alkali atom gazlarında gözlenen Bose-Einstein yoğuşmasına uğramış bir sistemin özellikleri incelenmiştir. Bu amaçla Gross-Pitaevskii yaklaşımı ve Varyasyonel Monte Carlo yöntemi kullanılmıştır. Seyrek gaz limitinde her iki yöntem arasında çok iyi uyum gözlenirken seyrek gaz limitinden uzaklaştıkça farklılıklar gözlenmiştir. Sistemin özelliklerinin Gross-Pitaevskii yaklaşımının öngördüğü gibi parçacık sayısı ile saçılma uzunluğunun çarpımına değil de, bu parametrelere ayrı ayrı bağımlı olduğu görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Bose-Einstein Yoğuşması, Varyasyonel Monte Carlo yöntemi, Gross-Pitaevskii denklemi

### Bose-Einstein Condensation In Harmonically Trapped Bosons

**Özet:** In this study, we have analyzed the properties of a Bose-Einstein condensate which is observed in the harmonically trapped gases of alkali atoms in an anisotropic trap. For this purposes we used Gross-Pitaevskii equations and Variational Monte Carlo method. A perfect agreement was observed in the dilute gas limit between the results of the two methods, however the difference between the results of the two methods increased as we go away from the dilute gas limit. Also, we observed that the properties of the system depend separately on the number of particles and on the scattering length which contradicts with the predictions of Gross-Pitaevskii equation.

**Key Words:** Bose-Einstein condensation, Variational Monte Carlo method, Gross-Pitaevskii equation

---

\* E-mail: teozturk@gmail.com

## Giriş

Bose-Einstein yoğuşması (BEC), çok sayıda bozonun bulunduğu sistemlerde çok düşük sıcaklıklarda oluşan bir faz değişikliğidir. Yoğuşma aynı taban durumunda makroskopik sayıdaki parçacığın toplanması şeklinde oluşur. Bose-Einstein yoğuşması, 1925 yılında Einstein tarafından öngörüldüğünden beri temel bir ilgi konusu olmuştur. Bose-Einstein yoğuşması bu öngörüden ancak 70 yıl sonra alkali atomların zayıf etkileşimli seyreltilmiş buharlarıyla yapılan bir seri deney sonucunda gözlenmiştir [1,2].

Bose-Einstein yoğuşmasının deneysel olarak elde edilmesi, bu konudaki deneysel ve teorik çalışmaları olağanüstü şekilde artırmıştır. Çok sayıda parçacıktan ibaret olan Bose-Einstein yoğuşmasının özelliklerinin teorik olarak incelenmesinde Monte Carlo yöntemleri oldukça kullanışlıdır.

Bu çalışmada harmonik olarak tuzaklanmış bozonlarda gözlenen Bose-Einstein yoğuşmasının bazı özellikleri Varyasyonel Monte Carlo (VMC) yöntemiyle incelenmiştir. Ayrıca ortalama alan yaklaşımı sonucunda elde edilen Gross-Pitaevskii (GP) denkleminin de çözümleri elde edilerek sonuçlar birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

## Materyal ve Metod

Tuzaklanmış Bose sistemlerinin en önemli özelliklerinden birisi de bunların homojen olmayan ve sonlu boyutlu sistemler olmasıdır. Bu sistemlerin homojen olmaması iki cisim etkileşmelerinde önemli rol oynar.

Şimdi  $m$  kütleli  $N$  tane bozonun  $V_{ext}(\mathbf{r})$  dış potansiyeliyle sınırlandırıldığını ve iki parçacık arası etkileşim potansiyelinin de  $V_{int}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  olduğunu düşünelim. Bu sistem için Hamiltoniyen

$$H = \sum_i^N \left( -\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + V_{ext}(\mathbf{r}_i) \right) + \sum_{i>j} V_{int}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad (1)$$

şeklinde olup burada  $V_{ext}(\mathbf{r})$  uygulanan dış potansiyeldir. Yapılan deneylerde kullanılan bu dış potansiyel yaklaşık olarak

$$V_{ext}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m (\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2) \quad (2)$$

şeklinindedir. Burada  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  ve  $\omega_z$  osilatör frekansları olup bunlar  $\omega_{ho}$  harmonik osilatör frekansına eşitse tuzak izotropiktir:  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega_{ho}$ . Anizotropik durum için z'yi eksenel koordinat,  $r_{\perp} = (x^2 + y^2)^{1/2}$  yi radyal koordinat olarak tanımlarsak bunlara uygun frekanslar da  $\omega_z$  ve  $\omega_{\perp} = \omega_x = \omega_y = \omega_{ho}$  olur. Eksenel ve radyal frekansların oranı  $\lambda = \omega_z / \omega_{\perp}$  tuzakın asimetrisini belirler.  $\lambda < 1$  iken tuzak puro şeklinde,  $\lambda > 1$  ise tuzak disk şeklindedir,  $\lambda = 1$  durumu ise izotropik durumu belirtir. Denk.(2)'de belirtilen eliptik tuzakta  $T = 0$  K'de tek bir bozonun ortalama kare titreşim genliği  $\langle x^2 \rangle = (\hbar/2m\omega_{ho})$  şeklindedir, öyle ki

$a_{ho} = (\hbar/m\omega_{ho})^{1/2}$  tuzakın karakteristik boyunu tanımlar [3].

Bu çalışmadaki amacımız zayıf etkileşimli Bose sistemlerinde BEC'nin genel özelliklerini tartışmaktır. Bu amaçla bozonlar arası etkileşmeyi göstermek için bir sert küre potansiyeli yani

$$V_{\text{int}}(r) = \begin{cases} \infty & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (3)$$

şeklinde bir potansiyel kullanılabilir. [4]. Burada  $a$  bozonların etkin sert küre yarıçapıdır. Eğer bozonlar arası mesafe sert küre yarıçapı olan  $a$ 'dan daha büyük bir  $r$  mesafesi ise  $V_{\text{int}}(r)$  sıfırdır, eğer  $r \leq a$  gibi bir mesafede bozonlar bir araya gelmeye çalışırlarsa potansiyelin değeri sonsuzdur.

Bose-Einstein yoğuşması yoğunluğun  $n = 10^{12} - 10^{14} \text{ par/cm}^3$  olduğu, 100 nK civarındaki sıcaklıklarda alkali gazlarda oluşmaya başlar [5]. Böylesi oldukça düşük sıcaklıklarda klasik etkileşmeler atomları lokalize eder ve kuantum örtüşmelerini önler, bu örtüşmelere ikili ve daha fazla çoklu çarpışmalar neden olur.

Seyrek gazlarda Bose-Einstein yoğuşmasının ortalama alan teorisi, ikili çarpışmaların yüksek mertebeli çarpışmalardan daha sık olduğu durumlar için geliştirilmiştir. Bu oldukça iyi bilinen seyrek gaz yaklaşımıdır. Seyreklik şartı atomlar arası mesafenin, atomlararası kuvvetlerin menziline daha büyük olduğu durumda gerçekleşir. Seyreklik atomik dalga boyunun, sert merkez çapıyla karşılaştırıldığında büyük olması durumunda olur. Bu şartlar altında atomlararası kuvvetler  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  şeklindeki etkileşmelerle modellenenir. Burada

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (4)$$

çiftlenim sabiti olup,  $a$ 'nın pozitif değeri atomlar arası itişmeyi belirlerken, negatif değeri atomların birbirini çektiği durumu gösterir.

Bu şartlarda sıfır sıcaklıktaki gaz, tamamıyla yoğuşma dalga fonksiyonuyla karakterize edilir. Yoğuşma dalga fonksiyonu Gross-Pitaevskii (GP) denklemi olarak bilinen nonlinear bir Schrödinger denklemi ile belirlenir. [6,7].

Gross-Pitaevskii teorisinde

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

denklemi zayıf etkileşimli bozonlardaki vorteks durumlarını açıklamak için geliştirilmiştir. Bu denklem enerji fonksiyonelinin varyasyonel minimizasyonu ile de türetilir:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \frac{\partial E}{\partial \Phi^*} \quad (6)$$

Burada E enerji fonksiyoneli

$$E[\Phi] = \int d\mathbf{r} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Phi|^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) |\Phi|^2 + \frac{g}{2} |\Phi|^4 \right] \quad (7)$$

şeklinde dir. (7) denklemindeki integralde bulunan ilk terim yoğuşmanın kinetik enerjisi, ikincisi harmonik osilatörden kaynaklanan enerji sonucusu ise ortalama alan etkileşim enerjisidir. Bu eşitlikte  $\Phi$ , Bose-Einstein Yoğuşma dalga fonksiyonunu,  $m$  her bir parçacığın kütlesini, gösterir. Bu denklem tuzağın simetrisine göre yani izotropik ve anizotropik tuzaklar göz önüne alınarak çözülebilir. Bu çözümlerden yoğuşmanın dalga fonksiyonu elde edilebilir. Ancak çözümleri VMC ile karşılaştırırken yalnız anizotropik durumu göz önüne aldık. Bunun iki ana nedeni vardır: Birincisi, deneysel uygulamalarda kullanılan tuzakların anizotropik olması, ikincisi ise anizotropik durumun zaten izotropik durumu da kapsamasıdır.

Taban durum için etkili bir nümerik hesaplama Dalfovo ve Stringari tarafından yapılmıştır [8]. Bu yazarlar en dik iniş yöntemiyle (7) denklemindeki enerji fonksiyonelinin doğrudan minimizasyonunu içeren bir çözüm üretmişlerdir.

### VMC Yöntemi

VMC varyasyonel bir ilkeye dayanan bir kuantum Monte Carlo yöntemidir. Bu yöntemin başlangıç noktası bir Hamiltoniyen ve varyasyonel deneme dalga fonksiyonunun uygun bir seçimidir. Burada ele alınan problem için çok cisim Hamiltoniyenini uzunlukları tuzağın karakteristik uzunluğunun birimlerinde ( $a_{ho}$ ) ve enerji harmonik osilatörün enerjisi birimlerinde ( $\hbar\omega_{ho}$ ) ifade edersek

$$H = \sum_i^N \frac{1}{2} (-\nabla_i^2 + x_i^2 + y_i^2 + \lambda^2 z_i^2) + \sum_{i<j} V_{int}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir buradaki etkileşim potansiyeli (3) denklemindeki katı küre potansiyelidir. Bu çalışmada deneme dalga fonksiyonu olarak iki cisim etkilerini de içeren

$$\psi_v = \prod_i g(r_i) \prod_{i<j} f(r_{ij}) \quad (9)$$

formunda bir dalga fonksiyonu kullandık [9]. Buradaki  $g(r_i)$  fonksiyonu taban durumunda tuzak potansiyelinden ve diğer parçacıklar tarafından oluşturulan ortalama alandan gelen etkileri içeren tek parçacık terimidir.  $f(r_{ij})$  ise parçacıklar arası etkileşimin katkısını içeren bir Jastrow terimidir. Bu çalışmada DuBois ve Glyde [4] tarafından önerildiği gibi katı küre saçılma probleminin s-dalga çözümü olan

$$f(r_{ij}) = \begin{cases} (1 - a/r_{ij}) & r_{ij} > a \\ 0 & r_{ij} \leq a \end{cases} \quad (10)$$

fonksiyonu Jastrow çarpanı olarak kullanılmıştır. Tek parçacık terimi  $g(r_i)$  için ise

$$g(r_i) = \exp(-\alpha(x_i^2 + y_i^2 + \beta z_i^2)) \quad (11)$$

formu kullanılmıştır. Buradaki  $\alpha$  ve  $\beta$  varyasyonel parametrelerdir sistemin toplam enerjisinin beklenen değeri

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \langle \psi_v(R; \alpha, \beta) | H | \psi_v(R; \alpha, \beta) \rangle \\ &= \int \psi_v^*(R; \alpha, \beta) H \psi_v(R; \alpha, \beta) dR \\ &= \int |\psi_v(R; \alpha, \beta)|^2 \frac{1}{\psi_v(R; \alpha, \beta)} H \psi_v(R; \alpha, \beta) dR \end{aligned} \quad (12)$$

şeklinde verilir. Burada R vektörü, N parçacıklı bir sistemde bütün parçacıkların konumlarını gösteren 3N boyutlu bir vektördür ve  $\alpha, \beta$  dalga fonksiyonunda yer alan serbest parametrelerdir.  $\frac{1}{\psi} \hat{H} \psi$  ifadesi "lokal enerji" olarak adlandırılır ve parçacıkların yerleşiminin R vektörü ile verildiği duruma karşılık gelen enerjidir. Monte Carlo integrasyon yönteminde

$\frac{|\psi_v(R; \alpha, \beta)|^2}{\int |\psi_v(R; \alpha, \beta)|^2 dR}$  ağırlık fonksiyonu olarak kullanılarak (12) denklemleriyle verilen integral

hesaplanabilir. Sistemin taban durumunu en iyi tanımlayan çözümü elde etmek için enerjinin beklenen değerini minimum yapan parametrelerin belirlenmesi gerekir. Bu çalışmada kullanılan dalga fonksiyonu sadece iki serbest parametre ( $\alpha$  ve  $\beta$ ) içermektedir. Dolayısıyla enerjinin beklenen değeri sadece bu iki parametreye bağlı olacaktır, yani  $\langle E \rangle = E(\alpha, \beta)$  yazabiliriz.

Enerjinin minimum noktası

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \beta} = 0 \quad (13)$$

denklemlerini sağlar. Bu iki denklem  $\alpha$  ve  $\beta$  bilinmeyenleri için çözümlenerek aranan dalga fonksiyonu elde edilir. Bu çalışmada bu denklemlerin çözümü için iyi bilinen Newton-Raphson yönteminin iki bilinmeyenli fonksiyonlar için geliştirilmiş bir hali kullanılmıştır.

### Sonuçlar

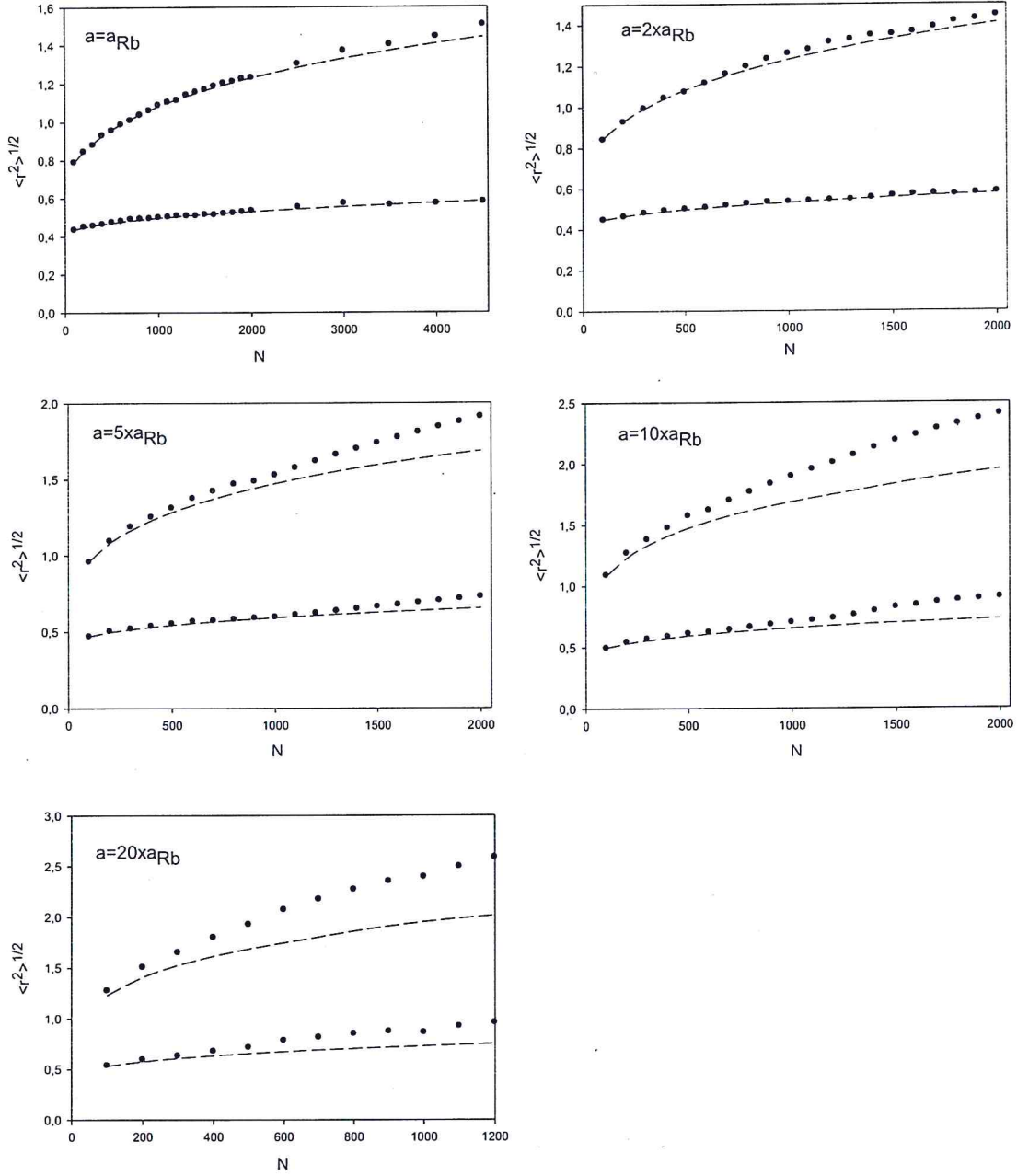
Bu bölümde anizotropik bir tuzakta tutulan seyrek bir katı küre bozon sistemi için elde ettiğimiz sonuçları vereceğiz. Bu sonuçlara geçmeden önce katı küre etkileşim potansiyeli yaklaşımının son derece basit bir yaklaşım olduğunu ancak seyrek bir gazın genel davranış özelliklerini incelemek için yeterli bir model olduğunu vurgulamak faydalı olacaktır. Bu sebeple hem GP denkleminin çözümlerinde hem de VMC analizinde parçacıklar arası etkileşim potansiyelinin bir katı küre potansiyeli olduğu varsayılmıştır.

Bozon bulutunun uzaysal dağılımının anlaşılması açısından parçacıkların ortalama aksel ve radyal konumları önemlidir. Ayrıca bu ortalama konumların sistemin diğer parametreleriyle nasıl değiştiğinin görülmesi de önemlidir. Bu sebeple Şekil 1.'de katı küre yarıçapının farklı değerleri için elde edilen radyal ve aksel yer değiştirmelerin kok ortalama değerleri tuzakta bulunan parçacık sayısına karşılık çizilmiştir. Grafikteki noktalar VMC sonuçlarını, kesikli çizgiler ise GP denkleminin çözümünden elde edilen sonuçları göstermektedir. Grafiklerden de görüleceği gibi saçılma uzunluğunun küçük değerlerinde ve tuzaktaki parçacık sayısının az olması halinde her iki yöntemden elde edilen sonuçlar birbirleriyle son derece uyumludur.

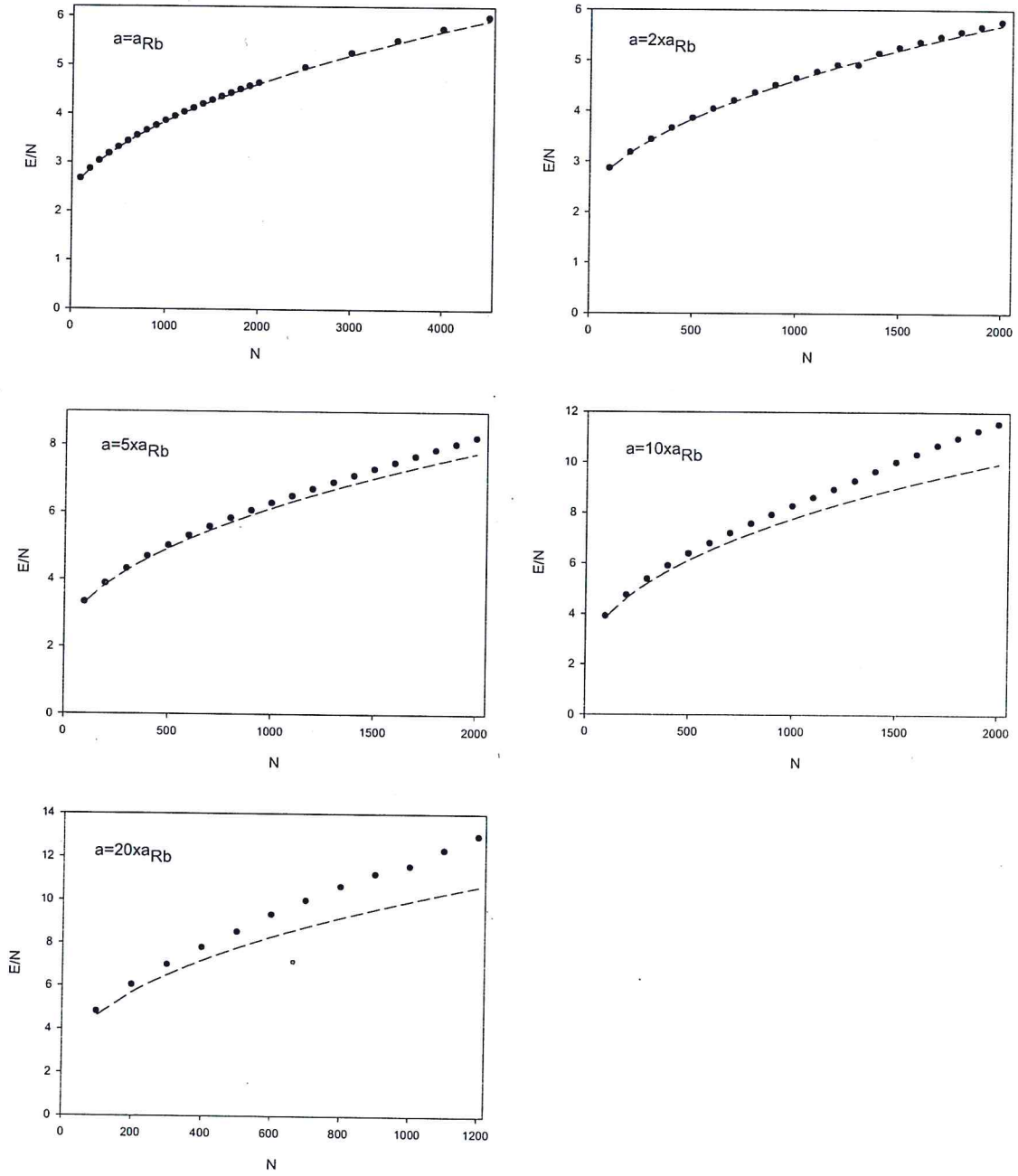
Düşük parçacık sayısı ve küçük saçılma uzunluğu seyrek gaz limitine karşılık gelir ve GP denklemleri bu bölgede geçerlidir. VMC yönteminden bulunan sonuçların seyrek gaz limitinde GP denklemiyle uyumlu sonuçlar vermesi kullanılan VMC yaklaşımının güvenli bir yaklaşım olduğunu gösterir.

Seyrek gaz limitinden uzaklaşıldıkça her iki yöntem arasında bir farkın ortaya çıktığı Şekil 1.'den görülmektedir. Yüksek yoğunluklarda GP denklemleri bozon bulutunun yarıçapını daha küçük bulmaktadır. Bozonların tuzak potansiyeliyle olan etkileşimlerinden kaynaklanan potansiyel enerjileri doğrudan  $\langle r^2 \rangle$  ve  $\langle z^2 \rangle$  ile orantılı olduğundan GP yaklaşımı sistemin toplam enerjisine olan potansiyel enerji katkısını daha küçük bulur. Ancak, bulut daha toplu bulunduğu için GP yaklaşımında parçacıklar arası etkileşimden gelen potansiyel enerji katkısı daha büyük bulunur.

GP denklemi bulut yarıçapını hafifçe küçük bulmakla birlikte, Şekil 1.'den de görüldüğü gibi bulutun genişleme davranışını, oldukça yüksek parçacık sayılarında bile oldukça iyi açıklamaktadır.



Şekil 1. Katı küre yarıçapının farklı değerleri için elde edilen radyal ve eksenel yer değişirmelerin kok ortalama değerleri tuzakta bulunan parçacık sayısına karşılık çizilmiştir. ( $a_{Rb}$  =Rubidyum atomunun s dalga saçılma uzunluğudur ve ilk deneysel verilere uygun olarak  $a_{Rb} = 0.000433 a_{ho}$  alınmıştır.)

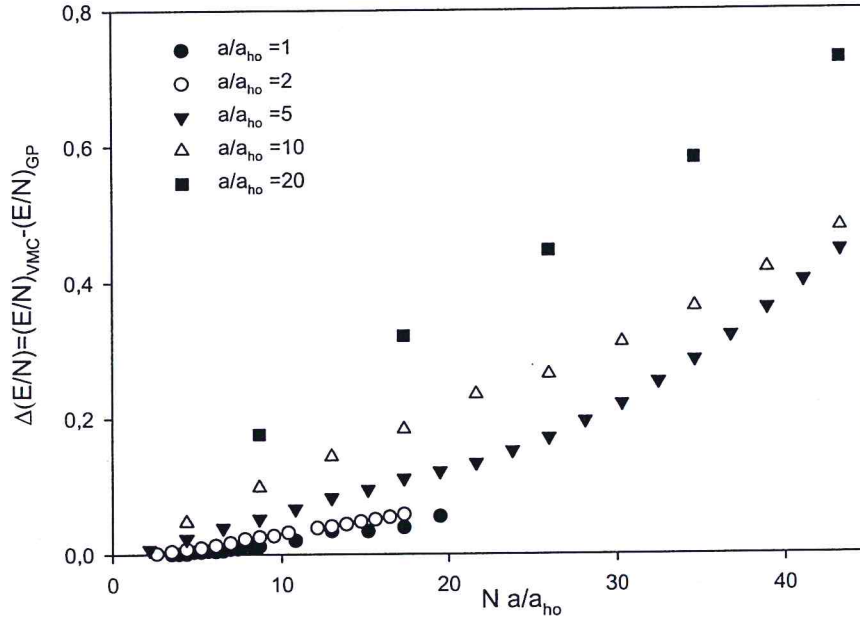


Şekil 2. Parçacık başına enerjinin tuzaktaki toplam parçacık sayısı ile değişimi farklı saçılma uzunlukları için verilmiştir.

Parçacık başına enerjinin tuzaktaki toplam parçacık sayısı ile değişimi Şekil 2.'de farklı saçılma uzunlukları için verilmiştir. Bu şekilden de görüleceği gibi gene seyrek gaz limitine karşılık gelen düşük parçacık sayılarında ve küçük saçılma uzunluklarında iyi bir uyum gözlenmektedir. Seyrek gaz limitinden uzaklaşıldıkça her iki yöntem arasındaki fark artmakta ve GP denkleminin parçacık başına enerjiyi hafifçe daha küçük bulmaktadır. Parçacık başına düşen kinetik enerjilerde her iki yöntem arasında büyük bir fark olması beklenmez. Dolayısıyla her iki yöntemden bulunan enerjiler arasındaki fark potansiyel enerjiden kaynaklanmaktadır. Yukarıda Şekil 1 hakkında yapılan tartışma hatırlanırsa GP yaklaşımının tuzak potansiyelinin katkısını daha

düşük bulurken parçacıklar arası etkileşim potansiyelini daha yüksek bulur. Bu sonuç toplam enerjinin GP denkleminde daha düşük bulunduğu sonucuyla da birleştirilirse, tuzak potansiyelinin parçacıklar arası etkileşim potansiyelinden daha büyük olduğu sonucuna varırız.

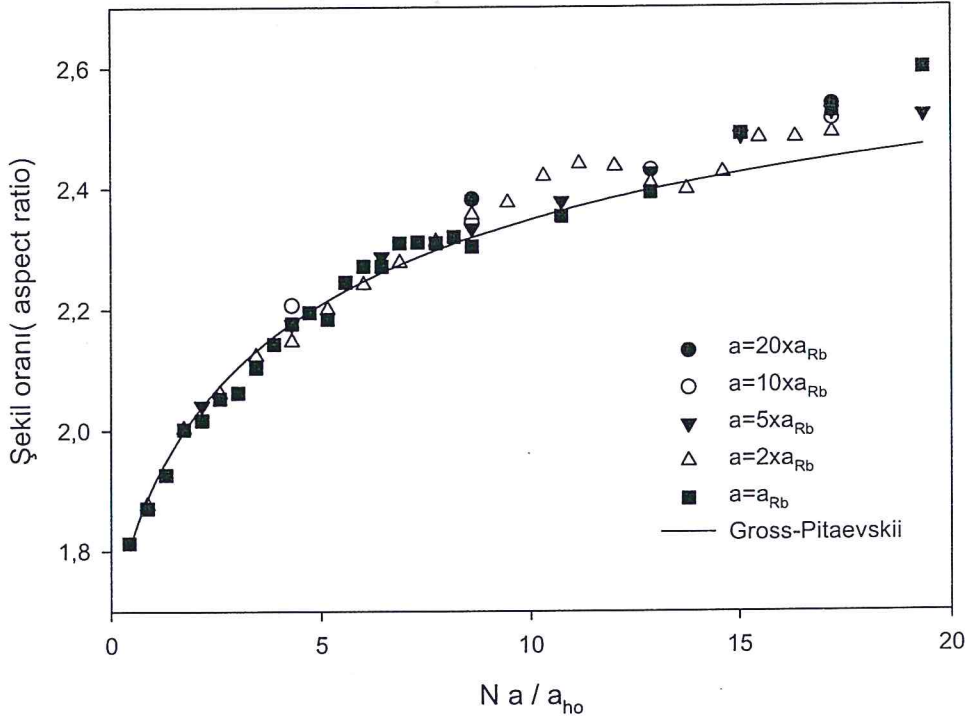
GP denkleminin incelendiğinde parçacıklar arası etkileşimlerin katkısının parçacık sayısı ile saçılma uzunluğunun çarpımıyla ( $Na$ ) orantılı olduğu görülür, dolayısıyla GP denkleminin sonuçları sadece  $Na$  çarpımına bağlıdır. Şekil 3.'te  $Na/a_{ho}$ 'ya karşılık  $\Delta E = E_{VMC} - E_{GP}$  çizilmiştir. Farklı saçılma uzunluklarına karşılık gelen değerler farklı şekillerle gösterilmiştir. Şekil 3.'ten de açıkça görülebileceği gibi parçacık başına düşen toplam enerji sadece  $Na$  çarpımına değil  $N$  ve  $a$ 'ya ayrı ayrı bağlıdır. Bu ayrılığın sağlanamaması GP yaklaşımının önemli bir eksikliğidir.



Şekil 3. VMC yönteminden ve GP denkleminde bulunan enerjilerin farkları ( $\Delta E = E_{VMC} - E_{GP}$ )  $Na/a_{ho}$  ya karşılık çizilmiştir.

Son olarak Şekil 4.'te bulutun radyal ve eksenel boyutlarının birbirine oranı olan şekil oranının (aspect ratio)  $Na/a_{ho}$ 'la değişimi verilmiştir. Sürekli çizgi GP denkleminin sonuçlarını göstermektedir. Farklı saçılma uzunluklarına karşılık gelen VMC sonuçları ise farklı şekillere sahip noktalarla gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi anizotropik bir tuzaktaki bozonlar için düşük yoğunluklarda VMC ve GP yöntemlerinden elde edilen sonuçlar birbirleriyle uyumlu iken, yüksek yoğunluklarda VMC yönteminden elde edilen şekil oranları daha hızlı büyümektedir.





Şekil 4. Bulutun radyal ve ekstenel boyutlarının birbirine oranının  $Na/a_{ho}$ 'la değişimi verilmiştir.

### Tartışma

Bu çalışmada harmonik olarak tuzaklanmış alkali atomların gazlarında gözlenen Bose-Einstein yoğunlaşmasının taban durum özelliklerinin tuzakta bulunan parçacık sayısına ve parçacıklar arası etkileşimin şiddetine göre değişimi hem GP denklemleri hem de VMC yöntemi kullanılarak incelenmiş ve her iki yöntemden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Parçacık sayısının küçük ve parçacıklar arası etkileşimin zayıf olduğu seyrek gaz limitinde her iki yöntem arasında mükemmel bir uyum gözlenmiştir. Ancak seyrek gaz limitinden uzaklaştıkça her iki yöntem arasında farklılıklar gözlenmeye başlanmıştır.

GP yaklaşımında etkileşen tuzaklanmış bozonlar için sistemin özellikleri sadece parçacık sayısı ile saçılma uzunluğunun çarpımına bağlı bulunurken, VMC yönteminden bulunan sonuçların bunu doğrulamadığı sistemin özelliklerinin parçacık sayısı ve etkileşim şiddetine ayrı ayrı bağlı olduğu gözlemiştir. Bu sebeple GP denkleminde bu doğrultuda bir düzeltme teriminin eklenmesi faydalı olacaktır.

### Kaynaklar

1. Anderson, M. H., Ensher J. R., Matthews M. R., Wieman C. E., and Cornell, E. A. **Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor**, Science 269, 198-201 (1995)
2. Davis, K. B., Mewes M. D., Andrews M. R., van Druten N. J., Durfee D. S., Kurn D. M. and Ketterle, W. **Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms**, Phys. Rev. Lett. 75, 3969 (1995)
3. Pethick, C. J., Smith, H. **Bose-Einstein Condensation in Dilute gases**, Cambridge University Press Cambridge (2002)
4. DuBois, J. L. and Glyde, H. R. **Bose-Einstein Condensation in trapped bosons: A variational Monte Carlo analysis**, Phys. Rev. A 63, 023602 (2001)

5. Minguzzi, A., Succi, S., Toschi, F., Tosi, M. P., Vignolo, P. **Numerical methods for atomic quantum gases with applications to Bose-Einstein condensates and to ultracold fermions**, Physics Reports 395 (2004)
6. Gross, E. P. **Structure of a quantized vortex in boson systems**, Nuovo Cimento 20, 454 (1961)
7. Pitaevskii, L. P. **Vortex lines in an imperfect Bose gas**, Zh. Eksp. Teor.Fiz. 40, 646 (1961) (Sov. Phys. JETP 13, 451 (1961))
8. Dalfovo, F. and Stringari, S. **Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices**, Phys. Rev. A 53, 2477 (1996)
9. Jastrow, R. **Many-Body Problem with Forces**, Phys. Rev. 98, 1479 (1955)