Yarı-Simetrik Metric Koneksiyonlu Yarı-Riemann Manifoldunun Coisotropik Altmanifoldu

Erol YAŞAR[1]

Muğla Üniversitesi, Ula M.Y.O., Ula, Muğla

Özet: Bu makalede, yarı-simetrik metric koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun coisotropik altmanifold çalışıldı. Yarı-simetrik metric koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun Gauss ve Weingarten denklemleri elde edildi ve bu denklemler yardımıyla teorem ve sonuçlar verildi.

Anahtar kelimeler: Lightlike coisotropik altmanifold, Yarı-simetrik koneksiyon, Gauss ve Codazzi denklemleri, Levi-Civita koneksiyon.

Yarı-Simetrik Metric Koneksiyonlu Yarı-Riemann Manifoldunun Coisotropik Altmanifoldu

Abstract: In this paper, It is studied lightlike coisotropic submanifold of semi-Riemannian manifold admitting semi-symmetric metric connection. It is obtained the Gauss-Codazzi and Weingarten equations with a semi-symmetric metric connection and some theorems and results related to these equations are given.

Key Words and Phrases : Lightlike coisotropic submanifold, Semi-simetric metric connection, equations of the Gauss and Codazzi, Levi-Civita connection.

1. Giriş

Riemann manifoldu üzerinde yarı-simetrik metrik koneksiyon ilk defa Hayden tarafından tanıtılmıştır [6]. Yano ise yarı-simetrik metrik koneksiyonlu Riemann manifoldunun sıfır eğrilik tensörüne sahip olması için gerek ve yeter şartın Riemann manifoldunun konformal flat olması gerektiğini ispat etti [8]. Daha sonra Imai [6] yarı-simetrik metrik koneksiyonlu Riemann manifoldunun hiperyüzeyinin temel özelliklerini verdi ve Gauss-Codazzi denklemlerinin konformal denklemlerini elde etti.

Duggal and Sharma [4] yarı-Riemann manifoldu üzerinde yarı-simetrik metrik koneksiyonu çalıştılar. Bu çalışmalarında yarı-simetrik koneksiyona göre yarı-Riemann ile Riemann manifoldları arasındaki bir bağıntı olduğunu gösterdiler. Nakao [7] (n+p)-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde yarı-simetrik metrik koneksiyonuna göre Gauss-Minardi denklemlerini elde etti. Yaşar ve Çöken [8] çalışmasında yarı-simetrik metrik koneksiyonu

[1] E-mail: yerol@mu.edu.tr

kullanarak yarı-Riemann manifoldunun total umbilik lightlike hiperyüzeyinin geometrisini incelediler.

Bu çalışmanın amacı, coisotropik altmanifold üzerine yarı-simetrik metrik koneksiyondan indirgenen koneksiyonun yarı-simetrik fakat metrik olmadığını göstermektir. Lightlike altmanifoldu ile Yarı-Riemann altmanifoldu arasındaki temel faklılık lightlike altmanifoldunda normal vektör demetinin tanjant vektör demeti içerisinde olmasıdır. Bu durum göz önüne alındığında lightlike altmanifoldların genel teorisini çalışmak geometri için önemli bir konudur. Son yıllarda lightlike altmanifoldlar üzerine bir çok önemli çalışma yapılmaktadır [2],[3].

Bu çalışmada, coisotropik altmanifold üzerinde yarı-simetrik metrik koneksiyondan indirgenen koneksiyonun yarı-simetrik fakat metrik olmadığı gösterildi. Yarı-simetrik koneksiyonuna göre lightlike altmanifold ve ekran dağılım için ikinci temel form ve şekil operatörü etc gibi geometrik objeler tanımlandı. Daha sonra coisotropik altmanifoldun denklem yapısı ve yarı-simetrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldu ile altmanifoldun eğrilik tensörleri arasındaki bağıntı bulundu.

2. Temel Kavramlar

M, indeksi $1 \leq \nu \leq n+p-1$ olan $\widetilde{g}$ yarı-Riemann metrikli $\widetilde{M}$ Yarı-Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. Buradan

$$T_xM^{\perp} = \left\{ Y_x \in T_x\widetilde{M} \mid \widetilde{g}_x(Y_x, X_x) = 0,\ \forall X_x \in T_xM \right\}$$

denklemi göz önüne alındığında $\forall\, x \in M$ için $RadT_xM = RadT_xM^{\perp} = T_xM \cap T_xM^{\perp}$ ise *M* ye $\widetilde{M}$ nin *lightlike* (*null, degenerate*) altmanifoldu denir. Benzer olarak eğer

$$RadTM : x \in M \to RadT_xM$$

İse $\widetilde{M}$ de *M* nin

$$\phi : M \to \widetilde{M}$$

dönüşümüne r- *lightlike* (*r-null, r-degenerate*) *altmanifold denir.*

Böylece ϕ, *M* deki X vektör alanını $\widetilde{M}$ deki ϕX vektör alanına taşıyan bir immersiyondur ve $g = \widetilde{g}_{|M}$ indirgenmiş metrik tensörü

$$g(X,Y) = \widetilde{g}(\phi X, \phi Y),\ \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

ile tanımlanır.

TM de *Rad*(*TM*) nin ortagonal tümleme vektör demeti ekran dağılım olarak adlandırılan bir non-dejenere alt vektör demetir ve *S*(*TM*) ile gösterilir. Böylece *S*(*TM*) perde dağılımı

(2.1) $$TM = S(TM) \perp Rad(TM$$

ortagonal direk toplamı içerisinde yazılır.

(2.1) denkleminden $TM^{\perp}$ de *Rad*(*TM*) nin $S\,(TM^{\perp})$ tümleme vektör demeti göz önüne alınırsa

(2.2) $$TM^{\perp} = Rad(TM) \perp S(TM^{\perp}).$$

elde edilir. Burada $S(TM^{\perp})$ alt vektör demeti *M* nin perde transversal vektör demetidir.

S(*TM*) ve $(S(TM))^{\perp}$ nin her ikiside non-dejenere olduğundan

(2.3) $$T\widetilde{M}_{|M} = S(TM) \perp S(TM)^{\perp}.$$

ve

(2.4) $$(S(TM))^{\perp} = S(TM^{\perp}) \perp (S(TM^{\perp}))^{\perp}.$$

dir.

ltr (*TM*), $S(TM^{\perp}))^{\perp}$ de tümleme bir vektör demeti olmak üzere

$$(S(TM^{\perp}))^{\perp} = Rad(TM) \oplus ltr\,(TM).$$

dir. Burada *ltr* (*TM*) alt vektörü *M* nin lightlike transversal vektör demeti olarak adlandırılır ve

$$tr\,(TM) = ltr\,(TM) \perp S(TM^{\perp})$$

şeklinde tanımlanır. Böylece *tr* (*TM*), lightlike altmanifoldların geometrisinin çalışmasında önemli bir rol oynar ve asla *TM* ye ortagonal değildir

Yukarıdaki ifadelerden aşağıdaki birleşim yazılabilir.

(2.5) $$T\widetilde{M}_{|M} = TM \oplus tr(TM) = S(TM) \perp S(TM^{\perp}) \perp \big(RadTM \oplus ltr(TM)\big).$$

(2.5) denklemi *M* boyunca $\widetilde{M}$ üzerinde çatıların lokal quasi ortanormal bazını verir (bak [2]) ve (ξ_i, N_i, X_α, W_α) şeklinde gösterilir. Burada

1. $\{\xi_i\}$ ve $\{N_i\}$, $i\in\{1,\ldots,r\}$, sırasıyla, $\Gamma(Rad(TM))$ ve $\Gamma(\,ltr\,(TM))$ nin lightlike bazlarıdır.
2. $\{X_a\}$, $a\in\{r+1,\ldots,N_i\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin ortanormal bazıdır.
3. $W_\alpha\}$, $\alpha\in\{r+1,\ldots,p\}$, $\Gamma(S(TM^\perp))$ nin ortanormal bazıdır.

Eğer $Rad(TM)$ = $TM^\perp$ ise lightlike altmanifolduna *coisotropik* denir. Buradan $S(TM^\perp)$ = {0} olduğundan

$$TM\widetilde{M}_{|M} = TM \oplus tr(TM) = S(TM) \perp (RadTM \oplus ltr(TM)). \tag{2.6}$$

dir. Böylece *M* boyunca $T\widetilde{M}$ nin çatılarının lokal quasi-ortanormal vektör alanları

$$\{\xi_1,\ldots,\xi_p,\ N_1,\ldots,N_p,\ X_{p+1},\ldots,X_{N_i}\}$$

şeklinde verilir.

Önerme 2.1. (M, g, $S(TM)$), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ nin bir *coisotropik altmanifoldu* olsun. *U*, *M* nin koordinat komşuluğu ve $\{\xi_1,\ldots,\ \xi_p\}$, $\Gamma(TM^\perp)$ nin bazı olmak üzere $PX\in\Gamma(S(TM))$ ve $\xi_j\in\Gamma(\,RadTM\,)$ için

$$\widetilde{g}(N_i,\xi_j) = \delta_{ij}\ ,\ \ i,j\in\{1,\ldots,p\} \tag{2.7}$$

ve

$$\widetilde{g}(N_i,N_j) = 0\ ;\ \widetilde{g}(PX,N_i) = 0 \tag{2.8}$$

olacak şekilde $T\widetilde{M}$ nin $\{N_1,\ldots,N_p\}$ C^∞ kesitleri vardır [4].

3. Yarı-Simetrik Metrik Koneksiyon

$\widetilde{M}$, ($n+p$)-boyutlu, $n>1$, C^∞ manifold ve $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ de lineer koneksiyon olsun. Buradan $\widetilde{\nabla}$ nın $\widetilde{T}$ torsiyon tensörü , $\forall\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$\widetilde{T}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - [\widetilde{X},\widetilde{Y}]$$

şeklinde verilen (1,2) tipinde bir tensördür. Eğer $\widetilde{T}$ torsiyon tensörü , 1-form $\widetilde{\pi}$ için

$$\widetilde{T}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \widetilde{\pi}(\widetilde{Y})\widetilde{X} - \widetilde{\pi}(\widetilde{X})\widetilde{Y}$$

denklemini sağlar ise $\widetilde{\nabla}$ koneksiyonuna *yarı-simetrik* denir [8].

$\widetilde{g}$ ve $\widetilde{\nabla}$, sırsıyla, $\widetilde{M}$ de ν, $1\le\nu\le n+p-1$, indeksli yarı-Riemann metrik ve koneksiyon olsun. Eğer

$$\widetilde{\nabla}\widetilde{g} = 0$$

ise $\widetilde{\nabla}$ ye *metrik koneksiyon* denir [11].

M, $\forall\,\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + \widetilde{\pi}(\widetilde{Y})\widetilde{X} - \widetilde{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Q} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}$ yarı-simetrik metrik koneksiyonuna sahip bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Burada $\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}$ bir Levi-Civita koneksiyon ve , $\widetilde{Q}$, $\widetilde{\pi}$ 1-form için

$$\widetilde{g}(\widetilde{Q},\widetilde{X}) = \widetilde{\pi}(\widetilde{X})$$

şeklinde tanımlanan bir vektör alanıdır. Bunların yanında $\widetilde{X}\in\widetilde{M}$ ve μ fonksiyonu için (2.4) denkleminden $\widetilde{Q}$ vektör alanı

(3.2) $$\widetilde{Q} = \phi Q + \sum_{i=1}^{p} \mu_i N_i$$

dir.

$\overset{\circ}{\nabla}$, $\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}$ Levi-Civita koneksiyonundan coisotropik altmanifold üzerine indirgenen simetrik lineer bir koneksiyon olmak üzere $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için

(3.3) $$\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\phi X} \phi Y = \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) + \sum_{i=1}^{p} B_i^l(X,Y) N_i$$

dir. Burada B_i^l *M* nin ikinci temel formudur.

∇ , $\widetilde{\nabla}$ yarı-simetrik metrik koneksiyonundan lightlike coisotropik altmanifoldu üzerine indirgenen koneksiyon olmak üzere $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için

(3.4) $$\widetilde{\nabla}_{\phi X} \phi Y = \phi(\nabla_X Y) + \sum_{i=1}^{p} m_i^l(X,Y) N_i$$

dir. Burada m_i^l, *M* coisotropik altmanifoldun (0,2) tipinde tensör alanıdır. O zaman (3.4) eşitliğine ∇ yarı-simetrik koneksiyonuna göre Gauss denklemi denir. (3.1), (3.3) ve (3.4) denklemlerinden

(3.5)

$$\phi(\nabla_X Y) + \sum_{i=1}^{p} m_i^l(X,Y) N_i = \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) + \sum_{i=1}^{p} B_i^l(X,Y) N_i + \widetilde{\pi}(\phi Y) \phi X - \widetilde{g}(\phi X, \phi Y) \widetilde{Q}$$

dir. Böylece (3.2) denklemi (3.5) de yerine yazılırsa

$$\phi(\nabla_X Y) + \sum_{i=1}^{p} m_i^l(X,Y) N_i = \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y + \pi(Y) X - g(X,Y) Q) + \sum_{i=1}^{p} \{B_i^l(X,Y) - \mu\, g(X,Y)\} N_i$$

,

elde edilir. Bu eşitlikten

(3.6) $$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \pi(Y) X - g(X,Y) Q$$

ve

(3.7) $$m_i^l(X,Y) = B_i^l(X,Y) - \mu\, g(X,Y), \quad i = 1,\dots,p$$

bulunur, burada $\pi(X) = \widetilde{\pi}(\phi X)$ dir. O zaman (3.6) denkleminden ve Levi-Civita koneksiyonundan coisotropik altmanifoldu üzerine indirgenen koneksiyonun metrik olmamasından

(3.8)

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = \sum_{i=1}^{p} (m_i^l(X,Y) + \mu\, g(X,Y)) \eta_i(Z) + \sum_{i=1}^{p} (m_i^l(X,Y) + \mu\, g(X,Z)) \eta_i(Y),$$

ve

(3.9) $$T(X,Y) = \pi(Y) X - \pi(X) Y.$$

dir. Burada η_i , $i = 1,\dots, p$,

$$\eta_i(Z) = \widetilde{g}(Z, N_i),\ i = 1,\dots,p$$

ile tanımlanan lokal diferansiyellenebilir bir 1-formdur.

Böylece (3.8) ve (3.9) denklemlerinden aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 3.1. $\widetilde{M}$, yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifold ve *M*, $\widetilde{M}$ nın coisotropik altmanifoldu olsun. O zaman $\widetilde{M}$ den *M* coisotropik altmanifold üzerine indirgenen koneksiyon yarı-simetrik fakat metrik degildir.

$\overset{\circ}{\tilde{\tilde{\nabla}}}$ Levi-Civita koneksiyonuna göre Weingarten denklemi

(3.10) $$\overset{\circ}{\tilde{\tilde{\nabla}}}_{\phi X} N_i = -\phi(A_{N_i} X) + \tau(X) N_i, \quad i = 1, \dots, p$$

dir. Burada A_{N_i}, *M* nin şekil operatörü ve τ bir 1-formdur [2].

P, TM den *S*(*TM*) ye bir projektif dönüşüm olsun. Böylece (2.1) ve (3.1) denklemleri kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\phi X} N_i = \overset{\circ}{\tilde{\tilde{\nabla}}}_{\phi X} N_i + \lambda \phi X - \lambda' \phi Q - \mu\lambda' N_i,$$

elde edilir, burada

$$\tilde{\pi}(N_i) = \lambda \text{ ve } \tilde{g}(\phi X, N_i) = \lambda'.$$

dir. Böylece (3.10) eşitliği kullanılırsa

(3.11) $$\tilde{\nabla}_{\phi X} N_i = \phi((-A_{N_i} + \lambda I) X - \lambda' Q) + (\tau(X) - \mu\lambda') N_i,$$

dir. (3.11) denklemineyarı-simetrik metrik koneksiyonuna göre Weingarten denklemi denir.

Önerme 3.2. *S*(*TM*) ve *S*(*TM*)', *M* de iki perde dağılım ve m_i^l ve $m_i^{l'}$, ∇ yarı-simetrik koneksiyonuna göre ikinci temel form olsunlar. O zaman *M* nin ikinci temel formu perde dağılımından bağımsızdır.

İspat. $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (3.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} m_i^l(X,Y) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\phi X}\phi Y - \phi(\nabla_X Y), \xi) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\phi X}\phi Y, \xi_i) - g(\phi(\nabla_X Y), \xi_i) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\phi X}\phi Y, \xi_i) \\ &= m_i^{l'}(X,Y) \end{aligned}$$

dir. Bu ise perde dağılımının ikinci temel formdan bağımsız olduğunu gösterir.

Böylece (3.4) denkleminden aşağıdaki önerme ifade edilir.

Önerme 3.3. Yarı-simetrik koneksiyonlu coisotropik altmanifoldun ikinci temel formu dejeneredir.

İspat. $\tilde{\nabla}$ yarı-simetrik metrik koneksiyon göz önüne alınırsa, önerme 3.2 den

$$m_i^l(X, \xi_i) = 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM)$$

dir. Bu ise ispatı tamamlar.

P, TM den *S*(*TM*) ye bir projektif dönüşüm olmak üzere, (2.1) denkleminden

(3.12) $$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} P\phi Y = \phi(\overset{\circ}{\overset{*}{\nabla}}_X PY) + \sum_{i=1}^{p} C_i^l(X, PY)\xi_i$$

ve

(3.13) $$\nabla_{\phi X} P\phi Y = \phi(\overset{*}{\nabla}_X PY) + \sum_{i=1}^{p} D_i^l(X, PY)\xi_i$$

elde edilir. Burada $\phi(\overset{\circ}{\overset{*}{\nabla}}_X PY)$ ve $\phi(\overset{*}{\nabla}_X PY) \in$ *S*(*TM*) ve C_i^l, D_i^l, *M* de bir 1-formdur.

Böylece (3.6) denkleminden

$$\nabla_{\phi X} P\phi Y = \overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} P\phi Y + \pi(P\phi Y \phi) X - g(\phi X, \phi PY)\phi PQ$$

dir, burada ϕQ

$$\phi Q = PQ + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, \xi_i$$

İle tanımlanan bir vektör alanıdır.

Böylece (3.12) ve (3.13) denklemlerinden

$$\phi(\overset{*}{\nabla}_X PY) + \sum_{i=1}^{p} D_i^l(X,PY)\xi_i =$$

$$\phi(\overset{\circ}{\overset{*}{\nabla}}_X PY) + \sum_{i=1}^{p} C_i^l(X,PY)\xi_i + \pi(P\phi Y)\phi X - g(\phi X, \phi PY)(\phi PQ + \lambda\xi_i)$$

dir. Buradan da

$$\sum_{i=1}^{p} D_i^l(X,PY) = \sum_{i=1}^{p} C_i^l(X,PY) - \lambda\, g(X,PY) \tag{3.14}$$

ve

$$\overset{*}{\nabla}_X PY = \overset{\circ}{\overset{*}{\nabla}}_X PY + \pi(PY)X - g(X,PY)PQ \tag{3.15}$$

elde edilir, burada $\pi(X) = \widetilde{\pi}(\phi X)$ dir.

(3.15) denklemi kullanılırsa

$$(\overset{*}{\nabla}_{\phi X} g)(P\phi Y, P\phi Z) = 0\,. \tag{3.16}$$

ve

$$\overset{*}{T}(\phi X, \phi Y) = \pi(PY)X - \pi(PX)Y. \tag{3.17}$$

elde edilir. Böylece (3.16) ve (3.17) den aşağıdaki önerme ifade edilir.

Önerme 3.4. Yarı-simetrik koneksiyonlu *M* coisotropik altmanifoldundan perde üzerine indirgenen $\overset{*}{\nabla}$ koneksiyonu yarı-simetrik metrik koneksiyondur.

4. Gauss ve Codazzi Denklemleri

$\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}$ Levi-Civita ve $\overset{\circ}{\nabla}$ indirgenmiş koneksiyonları göz önüne alınırsa $\widetilde{M}$ ve *M nin* eğrilik tensörleri

$$\overset{\circ}{\widetilde{K}}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} = \overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\widetilde{X}} \overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\widetilde{Y}} \widetilde{Z} - \overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\widetilde{Y}} \overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Z} - \overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]} \widetilde{Z}$$

ve

$$\overset{\circ}{K}(X,Y)Z = \overset{\circ}{\nabla}_X \overset{\circ}{\nabla}_Y Z - \overset{\circ}{\nabla}_Y \overset{\circ}{\nabla}_X Z - \overset{\circ}{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

dir. Buradan $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonuna göre coisotropik altmanifoldunun denklem yapıları $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için

(4.1)

$$\widetilde{g}(\overset{\circ}{\widetilde{K}}(\phi X, \phi Y, \phi PZ), P\phi W) =$$

$$\phi(g(\overset{\circ}{K}(X,Y)PZ, PW)) + \sum_{i=1}^{p} B_i^l(X,PZ)C_i^l(Y,PW) - \sum_{i=1}^{p} B_i^l(Y,PZ)C_i^l(X,PW)$$

(4.2)

$$\tilde{g}(\overset{\circ}{\tilde{K}}(\phi X,\phi Y,\xi_i),PW)=$$
$$\phi(g(\overset{\circ}{K}(X,Y)\xi_i,PW))+\sum_{i=1}^{p}B_i^l(X,\xi_i)C_i^l(Y,PW)-\sum_{i=1}^{p}B_i^l(Y,PZ)C_i^l(X,PW)$$

(4.3)
$$\tilde{g}(\overset{\circ}{\tilde{K}}(\phi X,\phi Y,N_i),P\phi W)=$$
$$\phi(g(\overset{\circ}{K}(X,Y)PW,N_i))+\sum_{i=1}^{p}B_i^l(X,\xi_i)g(A_{N_i}Y,N_i)-\sum_{i=1}^{p}B_i^l(Y,PW)g(A_{N_i}X,N_i)$$

dir [2]. Burada

$$\overset{\circ}{\tilde{K}}(\phi X,\phi Y,\phi Z,\phi PW)=\tilde{g}(\tilde{K}(\phi X,\phi Y)\phi Z,\phi PW)$$

ve

$$K(X,Y,Z,PW)=g(K(X,Y)Z,PW).$$

Şeklin de tanımlıdır. Böylece $\tilde{\nabla}$ yarı-simetrik metrik koneksiyonlu $\tilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun eğrilik tensörü

$$\tilde{R}(\phi X,\phi Y)\phi Z=\tilde{\nabla}_{\phi X}\tilde{\nabla}_{\phi Y}\phi Z-\tilde{\nabla}_{\phi Y}\tilde{\nabla}_{\phi X}\phi Z-\tilde{\nabla}_{\phi[X,Y]}\phi Z$$

dir. Buradan (3.4) ve (3.10) dan

(4.4)
$$\begin{aligned}\tilde{R}(\phi X,\phi Y)\phi Z&=\phi(R(X,Y)Z)+m_i^l(Y,Z)(-A_{N_i}+\lambda I)\phi X-\lambda' m_i^l(Y,Z)\phi Q\\&-m_i^l(X,Z)(-A_{N_i}+\lambda I)\phi Y+\lambda' m_i^l(X,Z)\phi Q+\{m_i^l(\pi(Y)X-\pi(X)Y,Z)\\&+(\nabla_X m_i^l)(Y,Z)-(\nabla_Y m_i^l)(X,Z)+m_i^l(Y,Z)(\tau(X)-\mu\lambda')-m_i^l(X,Z)(\tau(Y)-\mu\lambda')\}N_i\end{aligned}$$

Böylece (4.4) denklemi ile ϕPW , ξ_i ,ve N_i vektör demetleri skaler çarpılırsa

(4.5)
$$\begin{aligned}\tilde{R}(\phi X,\phi Y,\phi Z,\phi PW)&=\phi(g(R(X,Y)Z),PW)+m_i^l(Y,Z)(-A_{N_i}+\lambda I)\tilde{g}(\phi X,\phi PW)\\&-m_i^l(X,Z)(-A_{N_i}+\lambda I)\tilde{g}(\phi Y,\phi PW)+\lambda' m_i^l(X,Z)\tilde{g}(\phi Q,\phi PW)\\&-\lambda' m_i^l(Y,Z)\tilde{g}(\phi Q,\phi PW)\end{aligned}$$

(4.6)
$$\begin{aligned}\tilde{R}(\phi X,\phi Y,\phi Z,\xi_i)&=m_i^l(\pi(Y)X-\pi(X)Y,Z)+(\nabla_X m_i^l)(Y,Z)-(\nabla_Y m_i^l)(X,Z)\\&+m_i^l(Y,Z)(\tau(X)-\mu\lambda')-m_i^l(X,Z)(\lambda(Y)-\mu\lambda)\end{aligned}$$

(4.7)
$$\begin{aligned}\tilde{R}(\phi X,\phi Y,\phi Z,N_i)&=g(\phi(R(X,Y)Z),N_i)+m_i^l(Y,Z)(-A_{N_i}+\lambda I)\tilde{g}(\phi X,N_i)\\&-m_i^l(X,Z)(-A_{N_i}+\lambda I)g(\phi Y,N_i)+\lambda' m_i^l(X,Z)g(\phi Q,N_i)\\&-\lambda' m_i^l(Y,Z)g(\phi Q,N_i)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu (4.5)-(4.7) denklemlerine yarı-simetrik koneksiyonlu coisotropik altmanifoldunun Gauss ve codazzi denklemleri denir.

Kaynaklar

1. Barua, B., **Submanifold of Riemannian Manifold Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection**, AL.I.CUZA IASI (1998)
2. Duggal, K., and Bejancu, A., **Lightlike Submanifold of Semi-Riemannian Manifold and Applications**, Kluver Academic Pub. (1996).
3. Duggal, K.L. and Bejancu A., **Lightlike Submanifold of Semi-Riemannian Manifold Applications**, Acta Appl. Math 38, 197-215, (1995).
4. Duggal, K.L. and Sharma R., **Semi-Symmetric Metric Connection In A Semi-Riemannian Manifold**, Indian J. Pure appl Math., 17 (11), 1276-1282, (1986).
5. Imai, T., **Hypersurfaces of a Riemannian Manifold with Semi-Symmetric Metric Connection**, Tensor, N.S., Vol. 23,300-306, (1972).
6. Nakao, Z., **Submanifold of Riemannian Manifold with Semi-Symmetric Metric Connections**, Proc. Amer. Math. Soc. 54, 261-266,(1976).
7. Yano, K., **On Semi-Symmetric Metric Connection**, Rev. Roum. Math. Pures Et Appl., 15, 1579-1586, (1970).
8. Yaşar E., Çöken C., Yücesen A., **Totally Umbilical Lightlike Hypersurfaces in Semi-Riemannian Manifold with Semi-Symmetric Metric Connection**, Int. J. of Pure and App. Math., Vol 23, No.3, 379-391, (2005).