S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi Sayı 20 (2002) 23-31, KONYA

Transversal Simetrik Afin İmmersiyonların Eğrilik Tensörleri

Atakan Tuğkan Yakut*

Özet: Bu çalışmada ; [1] de tanımlanan transversal simetrik afin immersiyon ile orijinal immersiyonun ; eğrilik tensörleri arasındaki bağıntılar elde edildi.

Anahtar kelimeler : **Transversal, Afin, İmmersiyon , Eğrilik , Tensör**

Curvature Tensor of Transversally Symmetric Affine İmmersions

Abstract: In this study, some relationship between the cuvature tensor of thr transversally symmetric immersion which is defined in [1] and the curvature tensor of the original immersion are obtained.

Keywords : **Transversal , Affine , İmmersion , Curvature , Tensor**

Giriş

Afin diferensiyel geometrinin tarihçesi ve düşünce yapısı [1]' in giriş bölümünden görülebileceği için, burada yeniden vermeyeceğiz.

Bu makale iki bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde; Afin immersiyon ve Afin hiperyüzey immersiyonu tanıtılmış , İkinci Bölümde de n-boyutlu bir M manifoldundan (n+1)-boyutlu $\widetilde{M}$ manifolduna transversal simetrik afin immersiyonların eğrilik tensörleri ve hacim elementleri ile orijinal immersiyonların eğrilik tensörleri ve hacim elementleri arasındaki bağıntılar üzerine 6 Teorem ve 4 sonuç verilmiştir.

1 Afin immersiyonlar

Bu çalışmanın tamamında afin konneksiyonlar torsiyonsuz olarak alınacaktır.

M, $\widetilde{M}$ sırasıyla n , (n+p)-boyutlu ve ∇, $\widetilde{\nabla}$ koneksiyonlu afin manifoldlar olmak üzere ;

$f : M \to \widetilde{M}$ de bir afin hiperyüzey immersiyonu olsun. $p \in M$ noktasına bir $\overset{\omega}{\omega} \in T_{f(p)} \widetilde{M}$ vektörü karşılık getiren dönüşüme f dönüşümü boyunca vektör alanı denir.

* N.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü Niğde

Eğer $X \in \chi(M)$ ise , f_* dönüşümü p noktasına $f_*\big|_p(X_p)$ vektörünü karşılık getirir ve böylece $f_*(X)$ vektör alanı f dönüşümü boyunca bir vektör alanı olur.

M' nin her bir noktası civarında f(M) ye teğet olmayan yani; $\forall\, p \in M$ için $\xi(p) \notin f_*(T_pM)$ özelliğinde , f dönüşümü boyunca bir ξ vektör alanı vardır. Böyle ξ'ye transversal vektör alanı denir.

Eğer $X \in \chi(M)$; f boyunca bir vektör alanı ω, $\widetilde{M}$ nın bir açık kümesi üzerinde tanımlı vektör alanları da $\widetilde{X}$, $\widetilde{\omega}$ olsun.

$f_*(X) = \widetilde{X}of$ ve $\omega = \widetilde{\omega}of$ olmak üzere ;

$$\widetilde{\nabla}_X \omega = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{\omega})of$$

şeklinde $\widetilde{\nabla}_Y \omega$ vektör alanı tanımlayabiliriz. Bu tanım $\widetilde{X}$ ve $\widetilde{\omega}$ vektör alanlarının seçilişinden bağımsızdır ve $\widetilde{\nabla}_X \omega$ afin konneksiyon olma özelliklerini sağlar[2,3].

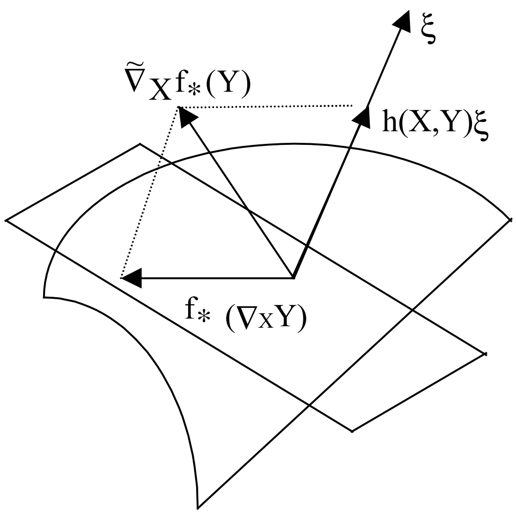
Eğer $N: x \in M \to N_x$ olacak şekilde diferensiyellenebilir bir N transversal alt uzayı varsa , f afin immersiyonu ; N_x, x noktasındaki afin normal uzayı ve N de afin normal demeti göstermek üzere;

$$T_{f(x)}\widetilde{M} = f_*(T_xM) \oplus N_x \qquad (1)$$

ile tanımlanır ve N-değerli bir simetrik h bilineer formu vardır. M üzerindeki X ve Y vektör alanları için ,

$$\widetilde{\nabla}_{f_*(X)} f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X,Y)\xi \qquad (2)$$

ifadesine Gauss Formülü denir. Burada eşitliğin sol yanı $f_*(Y)$ vektör alanının $f_*(X)$ vektör alanına göre f boyunca kovaryant türevini ifade etmektedir. Sağ taraftaki ilk terim teğetsel bileşeni ikinci terim ise transversal bileşeni ifade etmektedir[2.3].



Şekil.1. Afin hiperyüzey immersiyonu

Eğer (2) formülünde $x \in M$ noktasında h sıfıra eşit ise, bu durumda f ye total geodezik afin immersiyon denir. f' nin total geodezik olma özelliği ξ transversal vektör alanının seçilişinden bağımsızdır.

$f: M \to \widetilde{M}$ afin hiperyüzey immersiyonu ve ξ, f ile eşleşen transversal vektör alanı

$$\widetilde{\nabla}_Y \xi = -f_*(S(X)) + \tau(X)\xi \qquad (3)$$

yazılabilir. (3) eşitliğine afin immersiyonlar için Weingarten Denklemi, S ye afin immersiyonun şekil operatörü, τ ya da afin immersiyonun transversal konneksiyon formu denir [3,4].

$f : (M, \nabla) \to (\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ ve $g : (M, \nabla') \to (\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ iki afin hiperyüzey immersiyonu olmak üzere ; her $x \in M$ için $g(x) = f(x) - 2\xi_x$ oluyorsa g hiperyüzey immersiyonuna ξ transversal vektör alanına göre f hiperyüzey immersiyonunun transversal simetriği denir.

2 Transversal Simetrik Afin İmmersiyonların Eğrilik Tensörleri

Teorem 2.1

i) $\tan[\widetilde{R}(X,Y)Z] = R(X,Y)Z - [h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY]$

ii) $\mathrm{trans}[\widetilde{R}(X,Y)Z] = (\nabla_X h)(Y,Z) + \tau(X)h(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) - \tau(Y)h(X,Z)$

iii) $\tan[\widetilde{R}(X,Y)\xi] = -(\nabla_X S)(Y) + \tau(X)SY + (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)SX$

iv) $\mathrm{trans}[\widetilde{R}(X,Y)\xi] = -h(X,SY) - h(SX,Y) + 2d\tau(X,Y)$.

İspat: [2] den görülebilir.

Teorem 2.2 $g : M \to \widetilde{M}$ afin hiperyüzey immersiyonu ve ∇' konneksiyonunun eğrilik tensörü R' olmak üzere

(i)$\mathrm{Tan}\,\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z) = g_*(R'(X,Y)Z - (h'(Y,Z)S'(X) - h'(X,Z)S'(Y)))$

(ii)$\mathrm{Trans}\,\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z) = \{(\nabla'_X h')(Y,Z) + \tau'(X)h'(Y,Z) - (\nabla'_Y h')(X,Z) - \tau'(Y)h'(X,Z)\}$

(iii)$\mathrm{Tan}\,\widetilde{R}_g(X,Y)\xi = -(\nabla'_X S')(Y) + \tau'(X)S'(Y) + (\nabla'_Y S')(X) - \tau'(Y)S'(X)$

(iv)$\mathrm{Trans}\,\widetilde{R}_g(X,Y)\xi = -h'(X,S'(Y)) + h'(S'(X),Y) + 2d\tau'(X,Y)$

İspat: g immersiyonuda afin immersiyon olduğundan bu teoremin ispatına [2] den bakılabilir.

Teorem 2.3 $f, g : M \to \widetilde{M}$ afin hiperyüzey immersiyonları ve ∇ ile ∇' konneksiyonlarının eğrilik tensörleri sırası ile R ve R' olmak üzere

(i) $\tan\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z) = (I+2S)^{-1}R(X,Y)(I+2S)(Z) - h(Y,(I+2S)Z)(I+2S)^{-1}S(X) +$

$$h(X,(I+2S)Z)(I+2S)^{-1}S(Y) - 2\tau(Z)(I+2S)^{-1}(\tan\widetilde{R}(X,Y)\xi)$$

(ii) $\mathrm{trans}\,\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z) = (\nabla_X h)(Y,(I+2S)Z) + \tau(X)h(Y,(I+2S)Z)$

$$-(\nabla_Y h)(X,(I+2S)Z) + \tau(Y)h(X,(I+2S)Z) - 2\tau(Z)\tan\widetilde{R}(X,Y)\xi + 2\tau(\tan\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z))$$

(iii)$\tan\widetilde{R}_g(X,Y)\xi = (I+2S)^{-1}\tan\widetilde{R}_f(X,Y)\xi$

(iv)$\mathrm{trans}\,\widetilde{R}_g(X,Y)\xi = \mathrm{trans}\,\widetilde{R}_f(X,Y)\xi + 2\tau\widetilde{R}_g(X,Y)\xi$.

İspat: $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonunun eğrilik tensörü $\widetilde{R}$ olmak üzere

$$\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z) = g_*\{R'(X,Y)Z - (h'(Y,Z)S'(X) - h'(X,Z)S'(Y))\} +$$
$$\{(\nabla'_X h')(Y,Z) + \tau'(X)h'(Y,Z) - (\nabla'_Y h')(X,Z) - \tau'(Y)h'(X,Z)\}\xi \qquad (4)$$

(4) denkleminden

$$g_*\{R'(X,Y)Z - (h'(Y,Z)S'(X) - h'(X,Z)S'(Y))\} =$$
$$f_*\{R'(X,Y)Z - (h'(Y,Z)S'(X) - h'(X,Z)S'(Y))\} - 2\widetilde{\nabla}_{R'(X,Y)Z}\xi$$
$$+ 2\widetilde{\nabla}_{h'(Y,Z)S'(X)}\xi - 2\widetilde{\nabla}_{h'(X,Z)S'(Y)}\xi \qquad (5)$$

(5) denkleminde

$$\widetilde{\nabla}_{R'(X,Y)Z}\xi = -f_*(S(R'(X,Y)Z)) + \tau(R'(X,Y)Z)\xi$$

$$\widetilde{\nabla}_{h'(Y,Z)S'(X)}\xi = -f_*(S(h'(Y,Z)S'(X))) + \tau((h'(Y,Z)S'(X))\xi$$

$\widetilde{\nabla}_{h'(X,Z)S'(Y)}\xi = -f_*(S(h'(X,Z)S'(Y) + \tau(h'(X,Z)S'(Y))\xi$

değerleri yerlerine yazılırsa

$g_*\{R'(X,Y)Z-(h'(Y,Z)S'(X)-h'(X,Z)S'(Y))\} =$

$f_*\{R'(X,Y)Z-(h'(Y,Z)S'(X)-h'(X,Z)S'(Y)) + 2S(R'(X,Y)Z)$

$-2S(h'(Y,Z)S'(X)) + 2S(h'(X,Z)S'(Y))\} - 2\tau(R'(X,Y)Z)\xi + 2\tau((h'(Y,Z)S'(X))\xi$

$-2\tau(h'(X,Z)S'(Y))\xi$ (6)

bulunur.(6) denklemi (4) denkleminde yerine yazılırsa,

$\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z) = f_*\{R'(X,Y)Z-(h'(Y,Z)S'(X)-h'(X,Z)S'(Y)) +$

$2S(R'(X,Y)Z) - 2S(h'(Y,Z)S'(X)) + 2S(h'(X,Z)S'(Y))\} +$

$\{(\nabla'_X h')(Y,Z)+\tau'(X)h'(Y,Z)-(\nabla'_Y h')(X,Z)-\tau'(Y)h'(X,Z)$

$-2\tau(R'(X,Y)Z) + 2\tau((h'(Y,Z)S'(X)) - 2\tau(h'(X,Z)S'(Y))\}\xi$ (7)

Diğer taraftan,

$\widetilde{R}(X,Y)\{f_*(Z)+2f_*(S(Z))-2\tau(Z)\xi\} = \widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z)$

olduğundan,

$\widetilde{R}(X,Y)\{f_*(Z)+2f_*(S(Z))-2\tau(Z)\xi\} = f_*\{R(X,Y)Z-h(Y,Z)S(X)+h(X,Z)S(Y)\}$

$+\{(\nabla_X h)(Y,Z)+\tau(X)h(Y,Z)-(\nabla_Y h)(X,Z)-\tau(Y)h(X,Z)\}\xi$

$+2f_*\{R(X,Y)S(Z)-h(Y,S(Z))S(X)+h(X,S(Z))S(Y)\}+$

$2\{(\nabla_X h)(Y,S(Z))+\tau(X)h(Y,S(Z))-(\nabla_Y h)(X,S(Z))+\tau(Y)h(X,S(Z))\}\xi$

$-2\tau(Z)f_*\{-(\nabla_X S)(Y)+\tau(X)S(Y)+(\nabla_Y S)(X)-\tau(Y)S(X)\}-2\tau(Z)\{-h(X,S(Y))+h(S(X),Y)+2d\tau(X,Y)\}\xi$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse,

$\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z) = f_*\{R(X,Y)Z+2R(X,Y)S(Z)-h(Y,Z)S(X)-2(Y,S(Z))S(X)+h(X,Z)S(Y)+2h(X,S(Z))S($

$Y)+2\tau(Z)(\nabla_X S)(Y)-2\tau(Z)\tau(X)S(Y)-2\tau(Z)(\nabla_Y S)(X)+2\tau(Z)\tau(Y)S(X)\}+$

$(\nabla_X h)(Y,Z)+\tau(X)h(Y,Z)-(\nabla_Y h)(X,Z)-\tau(Y)h(X,Z)+$

$2(\nabla_X h)(Y,S(Z))+2\tau(X)h(Y,S(Z))-2(\nabla_Y h)(X,S(Z))+2\tau(Y)h(X,S(Z)) +$

$2\tau(Z)h(X,S(Y)) - 2\tau(Z)h(S(X),Y) - 2\tau(Z)d\tau(X,Y)\}\xi$ (8)

elde edilir. (7) ve (8) denklemlerinden tanjant kısımlar karşılaştırılırsa;

$(I+2S)R'(X,Y)Z-(I+2S)[h'(Y,Z)S'(X)-(I+2S)h'(X,Z)S'(Y)] =$

$R(X,Y)((I+2S)Z) - h(Y,(I+2S)Z)S(X) + h(X,(I+2S)Z)S(Y)$

$+2\tau(Z)\{(\nabla_X S)(Y) - \tau(X)S(Y) - (\nabla_Y S)(X) + \tau(Y)S(X)\}$

elde edilir. O halde

$(I+2S)(R'(X,Y)Z-h'(Y,Z)S'(X)+h'(X,Z)S'(Y))$

$=R(X,Y)((I+2S)Z)-h(Y,(I+2S)Z)S(X)+h(X,(I+2S)Z)S(Y)-2\tau(Z)\tan\widetilde{R}(X,Y)\xi$.

Buradan

$\tan\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z) = (I+2S)^{-1}R(X,Y)((I+2S)Z)-$

$h(Y,(I+2S)Z)(I+2S)^{-1}S(X)+h(X,(I+2S)Z)(I+2S)^{-1}S(Y)-2\tau(Z)(I+2S)^{-1}\tan\widetilde{R}(X,Y)\xi$

elde edilir. (7) ve (8) denklemlerinden transversal kısımlar karşılaştırılırsa;

$(\nabla'_X h')(Y,Z)+\tau'(X)h'(Y,Z)-(\nabla'_Y h')(X,Z)-\tau'(Y)h'(X,Z) - 2\tau(R'(X,Y)Z) + 2\tau$

$(h'(Y,Z)S'(X)) - 2\tau h'(X,Z)S'(Y)) =$

$(\nabla_X h)(Y,Z)+\tau(X)h(Y,Z)-(\nabla_Y h)(X,Z)-\tau(Y)h(X,Z)+$
$2(\nabla_X h)(Y,S(Z))+2\tau(X)h(Y,S(Z))-2(\nabla_Y h)(X,S(Z))+2\tau(Y)h(X,S(Z))$
$+2\tau(Z)h(X,S(Y))-2\tau(Z)h(S(X),Y)-2\tau(Z)d\tau(X,Y)$
elde edilir. Bu denklem düzenlenirse;
trans $\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z)$ $-2\tau($ tan $\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z))=$
$(\nabla_X h)(Y,(I+2S)Z)+\tau(X)h(Y,(I+2S)Z)-(\nabla_Y h)(X,(I+2S)Z)-\tau(Y)h(X,(I+2S)Z)$
$-2\tau(Z)\mathrm{trans}\widetilde{R}(X,Y)\xi$
bulunur ki, buradan da
trans $\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z) = 2\tau($ tan $\widetilde{R}_g(X,Y)g_*(Z))-2\tau(Z)$trans $\widetilde{R}(X,Y)\xi$
$+(\nabla_X h)(Y,(I+2S)Z)+\tau(X)h(Y,(I+2S)Z)-(\nabla_Y h)(X,(I+2S)Z)-\tau(Y)h(X,(I+2S)Z)$
elde edilir.
$\widetilde{R}_g(X,Y)\xi = g_*(-(\nabla'_X S')(Y)+\tau'(X)S'(Y)+(\nabla'_Y S')(X)-\tau'(Y)S'(X))$
$+(-h'(X,S'(Y))+h'(S'(X),Y)+2d\tau'(X,Y))\xi$
denkleminden
$g_*(-(\nabla'_X S')(Y)+\tau'(X)S'(Y)+(\nabla'_Y S')(X)-\tau'(Y)S'(X))$
$=f_*(-(\nabla'_X S')(Y)+\tau'(X)S'(Y)+(\nabla'_Y S')(X)-\tau'(Y)S'(X))-2\widetilde{\nabla}_{(-\nabla'_X S')(Y)}\xi$
$-2\widetilde{\nabla}_{\tau'(X)S'(Y)}\xi-2\widetilde{\nabla}_{(\nabla'_Y S')(X)}\xi-2\widetilde{\nabla}_{-\tau'(Y)S'(X)}\xi$ (9)
elde edilir.
$-2\widetilde{\nabla}_{(-\nabla'_X S')(Y)}\xi=-2f_*(S((\nabla'_X S')(Y)))+2\tau((\nabla'_X S')(Y))\xi$
$-2\widetilde{\nabla}_{\tau'(X)S'(Y)}\xi=2f_*(S(\tau'(X)S'(Y)))-2\tau(\tau'(X)S'(Y))\xi$
$-2\widetilde{\nabla}_{(\nabla'_Y S')(X)}\xi=2f_*(S((\nabla'_Y S')(X)))-2\tau((\nabla'_Y S')(X))\xi$
$-2\widetilde{\nabla}_{-\tau'(Y)S'(X)}\xi=-2f_*(S(\tau'(Y)S'(X)))+2\tau(\tau'(Y)S'(X))\xi$
değerleri (9) denkleminde yerlerine yazılırsa,
$g_*(-(\nabla'_X S')(Y)+\tau'(X)S'(Y)+(\nabla'_Y S')(X)-\tau'(Y)S'(X))=$
$f_*(-(I+2S)(\nabla'_X S')(Y)+(I+2S)(\tau'(X)S'(Y))+(I+2S)(\nabla'_Y S')(X)-(I+2S)(\tau'(Y)S'(X)))+$
$\{(-h'(X,S'(Y))+h'(S'(X),Y)+2d\tau'(X,Y)+2\tau((\nabla'_X S')(Y)-(\tau'(X)S'(Y))-(\nabla'_Y S')(X)+$
$(\tau'(Y)S'(X)))\}\xi$ (10)
Diğer taraftan
$\widetilde{R}_f(X,Y)\xi = f_*(-(\nabla_X S)(Y)+\tau(X)S(Y)+(\nabla_Y S)(X)-\tau(Y)S(X))$
$(-h(X,S(Y))+h(S(X),Y)+2d\tau(X,Y))\xi$ (11)
(10) ve (11) denklemlerinden tanjant kısımlar karşılaştırılırsa
$(I+2S)(-(\nabla'_X S')(Y)+(\tau'(X)S'(Y))+(\nabla'_Y S')(X)-(\tau'(Y)S'(X)))=-(\nabla_X S)(Y)+\tau(X)S(Y)+$
$(\nabla_Y S)(X)-\tau(Y)S(X)$
elde edilir. Buradan
$(I+2S)\tan\widetilde{R}_g(X,Y)\xi = \tan\widetilde{R}_f(X,Y)\xi$
ve
$\tan\widetilde{R}_g(X,Y)\xi = (I+2S)^{-1}\tan\widetilde{R}_f(X,Y)\xi$

bulunur.

(10) ve (11) denklemlerinde transversal kısımlar karşılaştırılırsa

$-h'(X,S'(Y))+h'(S'(X),Y)+2d\tau'(X,Y)+2\tau((\nabla'_X S')(Y)-\tau'(X)S'(Y)-(\nabla'_Y S')(X)+$
$\tau'(Y)S'(X))=-h(X,S(Y))+h(S(X),Y)+2d\tau(X,Y)$

$\text{trans}\,\widetilde{R}_g(X,Y)\xi-2\tau\widetilde{R}_g(X,Y)\xi=\text{trans}\,\widetilde{R}_f(X,Y)\xi$

$\text{trans}\,\widetilde{R}_g(X,Y)\xi=\text{trans}\,\widetilde{R}_f(X,Y)\xi+2\tau\widetilde{R}_g(X,Y)\xi$

elde edilir.

Teorem 2.4 f, g : M→ $\widetilde{M}$ iki afin immersiyon olsun. ξ_1 ve ξ_2 , f ve g ile eşleştirilmiş transversal vektör alanları olsun. g(x) = f(x) – $2\xi_x$ olmak üzere [ξ_1] ve [ξ_2] doğrultuları sadece h, h′ nın özdeş sıfır olduğu kümede farklı olabilir.

İspat: $Z\in\chi(M)$ ve Z, M ye teğet vektör alanı ve ϕ, M üstünde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere;

$\xi_2=f_*(Z)+\phi\xi_1,$

$\widetilde{\nabla}_X f_*(Y)=f_*(\nabla_X Y)+h_2(X,Y)\xi_2$

ve

$h_2(X,Y)f_*(Z)=0$ ve $\phi h_2(X,Y)=h_1(X,Y)$ [3].

Şimdi

$$\widetilde{\nabla}_X g_*(Y)=g_*(\nabla'_X Y)+h'_2(X,Y)\xi'_2 \qquad (12)$$

$$\begin{aligned} g_*(\nabla'_X Y) &= f_*(\nabla'_X Y)-2\widetilde{\nabla}_{\nabla'_X Y}\xi'_2 \\ &= f_*((I+2S)\nabla'_X Y)-2\tau(\nabla'_X Y)\xi'_2 . \end{aligned}$$

O halde (12) denklemi

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X g_*(Y) &= f_*((I+2S)\nabla'_X Y)+(h'_2(X,Y)-2\tau(\nabla'_X Y))\xi'_2 \\ &= f_*((I+2S)\nabla'_X Y+(h'_2(X,Y)-2\tau(\nabla'_X Y))(I+2S)Z) \\ &\quad +(h'_2(X,Y)-2\tau(\nabla'_X Y))(\phi-2\tau(Z)))\xi_1 \qquad (13) \end{aligned}$$

şeklini alır. Diğer taraftan

$\xi'_2=g_*(Z)+\phi\xi_1$

$$\begin{aligned} \xi'_2 &= f_*(Z)-2\widetilde{\nabla}_Z\xi_1+\phi\xi_1 \\ &= f_*(Z)+2f_*(S(Z))-2\tau(Z)\xi_1+\phi\xi_1 \\ &= f_*((I+2S)Z)+(\phi-2\tau(Z))\xi_1. \end{aligned}$$

Buna göre ;

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X g_*(Y) &= f_*((I+2S)\nabla'_X Y)+(h'_2(X,Y)-2\tau(\nabla'_X Y))(I+2S)f_*(Z) \\ &\quad +(h'_2(X,Y)-2\tau(\nabla'_X Y))(\phi-2\tau(Z)))\xi_1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem

$$\widetilde{\nabla}_X g_*(Y) = f_*((I+2S)\nabla'_X Y)-(2\tau(\nabla'_X Y)-h'_1(X,Y))\xi_1$$

denklemi ile karşılaştırılırsa

$$f_*((I+2S)\nabla'_X Y)=f_*((I+2S)\nabla'_X Y)+(h'_2(X,Y)-2\tau(\nabla'_X Y)(I+2S)f_*(Z))$$

ve

$h'_2(X,Y)-2\tau(\nabla'_X Y))(\phi-2\tau(Z))\xi_1=h'_1(X,Y)\xi_1-2\tau(\nabla'_X Y)$

bulunur. Buradan;

$(h_2'(X,Y) - 2\tau(\nabla_X' Y)(I+2S) f_*(Z)) = 0$
ve
$(\phi - 2\tau(Z))(h_2'(X,Y) - 2\tau(\nabla_X' Y))\xi_1 = (h_1'(X, Y) - 2\tau(\nabla_X' Y))\xi_1$
elde edilir. Eğer g, total geodezik değilse
$h_2'(X,Y) - 2\tau(\nabla_X' Y) \neq 0$ ve $(I+2S) f_*(Z) = 0$ olacak şekilde X, Y $\in \chi(M)$ vardır. Buna göre;
$\xi_2 = (\phi - 2\tau(Z))\xi_1$
olur.

Teorem 2.5 f, g : $M \to \widetilde{M}$ iki afin immersiyon olsun. $g(x) = f(x) - 2\xi_x$ olmak üzere f için ξ transversal vektör alanı $\xi_2 = f_*(Z) + \phi\xi_1$ şeklinde değiştiğinde g için ξ transversal vektör alanı $\xi_2' = g_*(Z) + \phi\xi_1$ şeklinde değişiyorsa; bu durumda $\xi_2' = \xi_2 - 2\widetilde{\nabla}_Z \xi_1$
elde edilir.

İspat: $\forall$ X $\in \chi(M)$ için
$g_*(X) = f_*(X) - 2\widetilde{\nabla}_X \xi_1$
$\quad = f_*(X) + 2 f_*(S(X)) - 2\tau(X)\xi_1$
olduğundan;
$f_*(X) = g_*(X) - 2 f_*(S(X)) + 2\tau(X)\xi_1$.
$\xi_2 = f_*(Z) + \phi\xi_1$
denkleminden
$\xi_2 = g_*(Z) - 2 f_*(S(Z)) + 2\tau(Z)\xi_1$
$\quad = g_*(Z) + \phi\xi_1 + 2(- f_*(S(Z)) + 2\tau(Z)\xi_1)$.
Buradan
$\xi_2 = \xi_2' + 2\widetilde{\nabla}_Z \xi_1$ bulunur.

Teorem 2.6 f, g :(M, ∇) $\to (\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ iki afin immersiyon olsun. $g(x) = f(x) - 2\xi_x$ olmak üzere g immersiyonu için ; ξ transversal vektör alanına göre afin temel formu h', afin şekil operatörü S', g nin M üzerine indirgediği afin konneksiyon ∇' ve konneksiyon bir formu τ' olmak üzere $\xi_2' = g_*(Z) + \phi\xi_1$ olduğunda,

(i) $\quad h_2' = \dfrac{1}{\phi} h_1'$

(ii) $\quad \overline{\nabla}_X' Y = \nabla_X' Y - \dfrac{1}{\phi} h_1'(X,Y)Z$

(iii) $\quad \tau_2' = \tau_1' + \dfrac{1}{\phi} h_1'(Z,.) + d\log|\phi|$

(iv) $\quad S_2' = \phi S_1' - \nabla_{\cdot}' Z + \tau_2'(\cdot)Z$.

İspat: Bu Teoremin ispatı [2]'den görülebilir.

Sonuç 2.1 f, :(M, ∇) $\to (\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ ve g (M, ∇') $\to (\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ afin immersiyonlar olmak üzere; ξ_2 ye göre afin temel formu $h_2'(X,Y)$, f nin ξ_1 e göre afin temel formu $h_1(X, Y)$ ve konneksiyon bir formu τ_1 ise

$$h_2'(X,Y) = \frac{1}{\phi}(h_1(X,(I+2S)Y) - 2(\nabla_X \tau_1)(Y) - 2\tau_1(X)\tau_1(Y) + 4\tau_1(I+2S)^{-1}$$
$$((\nabla_X S)(Y) + \tau_1(Y)S(X))$$

Sonuç.2.2. f : (M, ∇) $\rightarrow (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ ve g (M,∇')$\rightarrow (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ afin immersiyonlar olmak üzere g için indirgenmiş konneksiyon $\overline{\nabla}'$, f için indirgenmiş konneksiyon ∇ ise

$$\overline{\nabla}'_X Y = \nabla_X Y + 2(I+2S)^{-1}\big((\nabla_X S)(Y) + \tau_1(Y)S(X)\big)$$
$$-\frac{1}{\phi}\{h_1(X,(I+2S)Y)Z - 2(\nabla_X\tau_1)(Y)Z - 2\tau_1(X)\tau_1(Y)Z +$$
$$4(I+2S)^{-1}\big((\nabla_X S)(Y) + \tau_1(Y)S(X)Z\big)\ \}$$

Sonuç 2.3 f :(M, ∇) $\rightarrow (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ ve g (M,∇')$\rightarrow (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ afin immersiyonlar olmak üzere; g için afin temel formu τ'_2, f için afin temel form τ_1 ise

$$\tau'_2(X) = (I+2S)^{-1}\tau_1(X) + \frac{1}{\phi}(h_1(Z, (I+2S)X) - 2(\nabla_Z\tau_1)(X) - 2\tau_1(Z)\tau_1(X)$$
$$+ 4\tau_1(I+2S)^{-1}((\nabla_X S)(X) + \tau_1(Z)S(X)) + d\log|\phi|$$

Sonuç.2.4. f, :(M, ∇) $\rightarrow (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ ve g (M,∇')$\rightarrow (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ afin immersiyonlar olmak üzere; g immersiyonu için afin şekil operatörü S'_2 ve f immersiyonu için afin şekil operatörü S ise

$$S'_2(X) = \phi(I+2S)^{-1}S(X) - \nabla_X Z - 2(I+2S)((\nabla_X S)(Z) + \tau(Z)S(X)) + \{(I+2S)^{-1}\tau_1(X) + (h_1(Z, (I+2S)X)$$
$$- 2(\nabla_Z\tau_1)(X) - 2\tau_1(Z)\tau_1(X) + 4\tau_1(I+2S)^{-1}((\nabla_Z S)(X) + \tau_1(Z)S(X))\}Z..$$

Teorem.2.7. f:(M,∇)$\rightarrow (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$, g (M,$\nabla'$)$\rightarrow (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ iki afin immersiyon olsun.

g(x)=f(x)– 2ξ_x olmak üzere; f immersiyonu için indirgenmiş hacım elementi ω_f ve g immersiyonu için hacim elementi ω_g ise;

$$\omega_g(X_1,X_2,...,X_n) = \det(I+2S)\omega_f(X_1,X_2,...,X_n) .$$

eşitliği vardır.

İspat: f, ξ transversal vektör alanlı afin immersiyon olduğundan

$$\omega_f(X_1,X_2,...,X_n) = \widetilde{\omega}(f_*(X_1), f_*(X_2),..., f_*(X_n), \xi) .$$

Benzer şekilde g immersiyonu da ξ transversal vektör alanlı afin immersiyon olduğundan

$$\omega_g(X_1,X_2,...,X_n) = \widetilde{\omega}(g_*(X_1), g_*(X_2),..., g_*(X_n), \xi) .$$

$\forall$ X$\in\chi$(M) için

$$g_*(X) = f_*(X) - 2\widetilde{\nabla}_X\xi$$
$$= f_*(I+2S)(X) - 2\tau(X)\xi..$$

Buradan ;

$$\omega_g(X_1, X_2,..., X_n) = \widetilde{\omega}(f_*(I+2S)(X_1) - 2\tau(X_1)\xi, f_*(I+2S)(X_2) - 2\tau(X_2)\xi,...,$$
$$f_*(I+2S)(X_n) - 2\tau(X_n)\xi, \xi).$$

$\widetilde{\omega}$, (n+1)-alterne form olduğundan

$$\omega_g(X_1,X_2,...,X_n) = \widetilde{\omega}(f_*(I+2S)(X_1), f_*(I+2S)(X_2),..., f_*(I+2S)(X_n), \xi)$$
$$= \omega_f((I+2S)(X_1), (I+2S)(X_2),..., (I+2S)(X_n))$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\omega(AX_1,AX_2,...,AX_n) = |A|\omega(X_1,X_2,...,X_n) \quad [5]$$

olduğundan,

$$\omega_g(X_1,X_2,...,X_n) = \det(I+2S)\omega_f(X_1,X_2,...,X_n)$$

elde edilir.

Kaynaklar

1- Karlığa,B., Yakut , A.T ,**Transversal Simetrik Afin İmmersiyonlar Üzerine,** Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi,Cilt :15,No:2,(2002).

2- Dillen, F., **Locally symmetric complex affine hypersurfaces**, J. Geom., 33; 27-38(1988).

3- Nomizu, K. and Sasaki, T., **Affine Differential Geometry: geometry of affine immersions**. Cambridge University Press, (1994).

4- Nomizu, K. and Pinkall, U.,**On the Geometry of affine immersions**, Math.Z.,195; 165-178. (1987).

5- Flanders, H., **Local Theory of affine hypersurfaces**, J. Analyse Math., 15; 353-387, (1965).